# TUYỂN CHỌN NHỮNG CÂU HỎI VẬN DỤNG CAO

# NĂM 2019


TỔNG HỢP: NGUYỄN BẢO VƯƠNG

FACEBOOK: https://www.facebook.com/phong.baovuong

SĐT: 0946798489


Năm học: 2018 – 2019

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Hàm số $y=f(2x+1)+\frac{2}{3}x^2-8x+5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-1;7)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $y'=2f'(2x+1)+\frac{4}{3}x-8$.

Để hàm số $y=f(2x+1)+\frac{2}{3}x^2-8x+5$ nghịch biến thì $2f'(2x+1)+\frac{4}{3}x-8\le 0,\forall x\in D$ hay

$f'(t)\le\frac{12}{3}-\frac{1}{3}t,\forall t\in D_1$ (*) và $t=2x+1$.

+ Xét $t\in(-\infty;-4)\Rightarrow\begin{cases}f'(t)>0\\ \frac{12}{3}-\frac{1}{3}t>0\end{cases}$ nên chưa thể kết luận tính đúng - sai cho (*) (loại).

+ Xét $t\in(-4;-1)\Rightarrow f'(t)<0$ và $\frac{12}{3}-\frac{1}{3}t>0$ nên (*) đúng.

Suy ra $-4<2x+1<-1\Leftrightarrow -\frac{5}{2}<x<-1$ (loại)

+ Xét $t\in(-1;2)\Rightarrow\begin{cases}f'(t)<0\\ \frac{12}{3}-\frac{1}{3}t>0\end{cases}$ nên (*) đúng. Suy ra

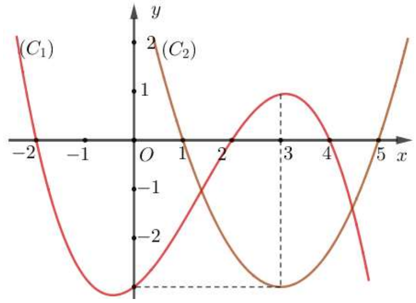
$-1<t<2\Rightarrow -1<2x+1<2\Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{2}$.

+ Xét $t\in(2;4)\Rightarrow\begin{cases}f'(t)>0\\ \frac{12}{3}-\frac{1}{3}t<0\end{cases}$ nên (*) sai (loại).

+ Xét $t\in(4;+\infty)\Rightarrow f'(t)<0$ và $\left[\begin{array}{l}\frac{12}{3}-\frac{1}{3}t\ge 0,t\in(4;12]\\ \frac{12}{3}-\frac{1}{3}t<0,\forall t\in(12;+\infty)\end{array}\right.$ nên chưa kết luận tính đúng - sai cho (*) (loại).

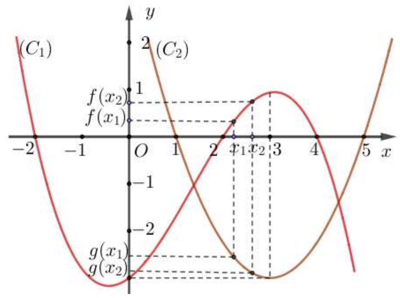
**Câu 2.** Cho hai hàm số $y=f(x),y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x).g(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(4;5)$.




**Lời giải**

**Chọn A**




Ta xét khoảng $(2;3)$, với mọi $x_1, x_2 \in (2;3), x_1 < x_2$ ta có:

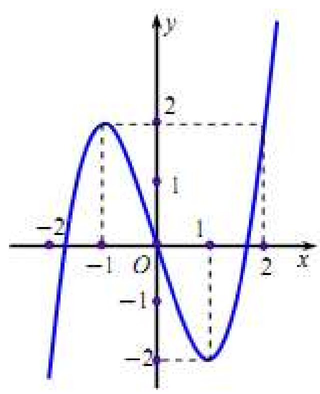
$$\begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 > g(x_1) > g(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < f(x_1) < f(x_2) \\ 0 < -g(x_1) < -g(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1).\left[-g(x_1)\right] < f(x_2).\left[-g(x_2)\right] \Rightarrow f(x_1).g(x_1) > f(x_2).g(x_2)$$

$$\Rightarrow y(x_1) > y(x_2)$$

Hay hàm số nghịch biến trên $(2;3)$.

**Câu 3.** **(SỞ GD THANH HÓA_14-04-2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.




**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ hình vẽ, đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)$. Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O$ nên $d=0$. Ta có

hệ phương trình $\begin{cases}-a+b-c=2\\ a+b+c=-2\\ 4a+2b+c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=-3\end{cases}$. Do đó $f(x)=x^3-3x$.

Đặt $t=\cos x, x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow t\in(-1;0] \Rightarrow f(\cos x)=f(t)=t^3-3t$ với $t\in(-1;0]$.

$f'(t)=3t^2-3<0, \forall t\in(-1;0] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(-1;0] \Rightarrow 2f(t)\in[2f(0);2f(-1))$

hay $2f(t)\in[0;4)$. Đặt $u=\sqrt{2f(t)} \Rightarrow u\in[0;2) \Rightarrow m=f(u)=u^3-3u$ với $u\in[0;2)$.

Ta có $f'(u)=3u^2-3 \Rightarrow f'(u)=0 \Leftrightarrow u=1\in[0;2)$.

Bảng biến thiên của $f(u)$.

| $u$ | 0 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(u)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(u)$ | 0 | ↘ | $-2$ | ↗ | 2 |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2\leq m<2$.

$\Rightarrow \begin{cases}m\in[-2;2)\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow m\in\{-2;-1;0;1\}$.

**Câu 4.** **(Trường THPT Thăng long Hà Nội)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\frac{5}{12}$ | ↘ | $-\frac{2}{3}$ | ↘ | $-\frac{9}{4}$ | ↗ | $\frac{8}{3}$ | ↗ | $+\infty$ |

Đặt $g(x)=f(x)-\ln(x^2+1)$. Khẳng định nào sau đây sai?

**A.** $g(3)<g(4)$. **B.** $g(-2)>g(-1)$. **C.** $g(-1)<g(0)$. **D.** $g(1)>g(2)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$g'(x)=f'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}$

Từ bảng biến thiên, ta có:

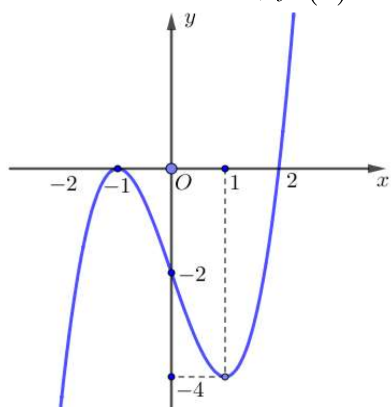
+Với $x\in(-\infty;0)$ thì $f'(x)\ge 0;\dfrac{2x}{x^2+1}\le 0\Rightarrow g'(x)\ge 0$, hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)\Rightarrow\ g(-2)<g(-1)$ suy ra đáp án sai làA.

$g(-1)<g(0)$ đáp án B đúng

+ Với $x\in[1;2]\Rightarrow\ f'(x)<0;\dfrac{2x}{x^2+1}>0\Rightarrow g'(x)<0$, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[1;2]\Rightarrow g(2)<g(1)$ đáp án C đúng

+ Với $x\in[3;4]\Rightarrow\ f'(x)\ge\dfrac{8}{3};\dfrac{2x}{x^2+1}<1\Rightarrow g'(x)>0$, hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[3;4]\Rightarrow g(3)<g(4)$

**Câu 5.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.




Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

**A.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

**B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**C.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

**D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2-2)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'(x^2-2)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right..$$

$$f'(x^2-2)>0\Leftrightarrow x^2-2>2\Leftrightarrow x^2>4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $f'(x^2-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $f(2)$ | ↗ | $f(-1)$ | ↗ | $f(-2)$ | ↘ | $f(-1)$ | ↘ | $f(2)$ | ↗ | |

Từ bảng biến thiên, ta thấy câu **D** là sai.

**Câu 6.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $\left|\tan^4 x - \dfrac{2}{\cos^2 x}\right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

**A.** $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** $2 < m < 3$. **D.** $2 \le m \le 3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\left|\tan^4 x - \dfrac{2}{\cos^2 x}\right| = m \Leftrightarrow \left|\tan^4 x - 2\left(\tan^2 x + 1\right)\right| = m \Leftrightarrow \left|\tan^4 x - 2\tan^2 x - 1\right| = m\ (*)$.

Đặt $t = \tan^2 x \Rightarrow t' = 2\tan x(\tan^2 x + 1)$.

$t' = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

BBT

| $x$ | $\frac{-\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $t$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra với mỗi $t \in (0;+\infty)$ cho ta hai nghiệm $x \in \left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $t = 0$ cho ta một nghiệm $x \in \left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Với cách đặt trên ta có $\left|t^2 - 2t - 1\right| = m\ (**)$

Phương trình $(*)$ có sáu nghiệm phân biệt $x \in \left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì phương trình $(**)$ có ba nghiệm phân biệt $t \in (0;+\infty)$

Đặt $f(t) = t^2 - 2t - 2, t \in (0;+\infty)$, ta có $f'(t) = 2t - 2, t \in (0;+\infty) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

BBT

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $1+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $f'(t)$ | $-2$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ đây ta suy ra BBT của hàm $\left|f(t)\right|$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $1+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left\|f(t)\right\|'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $\left\|f(t)\right\|$ | $2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ BBT ta suy ra $2<m<3$.

**Câu 7.** **(HÀ HUY TẬP - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2019)** Biết $m$là giá trị để bất phương trình $\begin{cases}0<x+y\le 1\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1\end{cases}$ có nghiệm duy nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $m\in\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **B.** $m\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$. **C.** $m\in(-2;-1)$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $2xy+m\ge 0\Leftrightarrow m\ge -2xy\ge -2.\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\Rightarrow m\ge -\dfrac{1}{2}$.

Nhận xét: Nếu hệ bất phương trình $\begin{cases}0<x+y\le 1\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1\end{cases}$ có nghiệm $(x;y), x\ne y$ thì hệ bất phương trình cũng có nghiệm $(y;x)$ do đó, hệ bất phương trình trên chỉ có nghiệm duy nhất khi $x=y$.

+Với $x=y$ ,ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases}0<2x\le 1\\ 2x+\sqrt{2x^2+m}\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\le \dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2x^2+m}\ge 1-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\le \dfrac{1}{2}\\ 2x^2+m\ge 1-4x+4x^2\ (*)\end{cases}$$

Ta có: $2x^2+m\ge 1-4x+4x^2\Leftrightarrow m\ge 2x^2-4x+1\ (**)$

Xét hàm số $f(x)=2x^2-4x+1$ trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x)=4x-4<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ |

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $m=-\dfrac{1}{2}$.

+Với $m=-\dfrac{1}{2}$, ta có: $\begin{cases}0<x+y\le 1\\ x+y+\sqrt{2xy-\dfrac{1}{2}}\ge 1\ (1)\end{cases}$

Ta có: $x+y+\sqrt{2xy-\dfrac{1}{2}}\ge 1\Rightarrow x+y+\sqrt{2.\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}}\ge x+y+\sqrt{2xy-\dfrac{1}{2}}\ge 1$

$\Rightarrow 1\ge 1$.

Dấu "=" xãy ra khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ bất phương trình $\begin{cases}0<x+y\le 1\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1\end{cases}$ có nghiệm duy nhất khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 8.** **(Thi Thử Cẩm Bình Cẩm Xuyên Hà Tĩnh 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5}m^2x^5-\dfrac{1}{3}mx^3-10x^2-\left(m^2-m-20\right)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tích giá trị của tất cả các phần tử thuộc $S$ bằng

**A.** $-2$. **B.** $-5$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2x^4-mx^2-20x-\left(m^2-m-20\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[m^2x^3+m^2x^2+\left(m^2-m\right)x+m^2-m-20\right]\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (*).$$

Xét $g(x)=m^2x^3+m^2x^2+\left(m^2-m\right)x+m^2-m-20$.

Nếu $g(x)=0$ không có nghiệm $x=1$ thì $f'(x)$ sẽ đổi dấu khi $x$ đi qua $1$, nên muốn $(*)$ thỏa thì điều kiện cần là

$g(1)=1\Leftrightarrow 2m^2-m-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{5}{2}\\ m=-2\end{array}\right.$.

Ta cần kiểm tra xem hai giá trị tìm được có thỏa $(*)$ không.

Nếu $m=\dfrac{5}{2}$ thì $g(x)=\dfrac{25}{4}x^3+\dfrac{25}{4}x^2+\dfrac{15}{4}x-\dfrac{65}{4}=\dfrac{5}{4}(x-1)\left(5x^2+10x+13\right)$, thỏa $(*)$.

Nếu $m=-2$ thì $g(x)=4x^3+4x^2+6x-14=(x-1)\left(4x^2+8x+14\right)$, thỏa $(*)$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{5}{2};-2\right\}$.

**Câu 9.** **(HÀ HUY TẬP - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2019)** Biết rằng các số thực $a$, $b$ thay đổi sao cho hàm số $f(x)=-x^3+(x+a)^3+(x+b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2-4a-4b+2$.

**A.** $-2$. **B.** $2$. **C.** $-4$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=-3x^2+3(x+a)^2+3(x+b)^2=3x^2+6(a+b)x+3a^2+3b^2$.

Do hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm trên $(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow x^2+2(a+b)x+a^2+b^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0 \Leftrightarrow ab\le 0$ (*).

**Cách 1:** Ta có $P=a^2+b^2-2a-2b+4=(a+b)^2-4(a+b)+4-2-2ab$

Hay $P=(a+b-2)^2-2ab-2\ge -2$, do $ab\le 0$ theo (*) và $(a+b-2)^2\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a+b-2=0\\ ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}$.

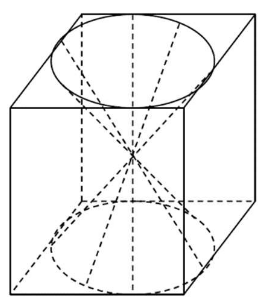
Vậy $\min P=-2$.

**Cách 2:** Do $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f'(-2)\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2-4(a+b)+4\ge 0$

$\Rightarrow P=a^2+b^2-4(a+b)+2\ge -2$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}$.

Vậy $\min P=-2$.

**Câu 10.** Một hình hộp đứng có đáy là hình vuông chứa đồng hồ cát như hình vẽ. Tỉ số thể tích của đồng hồ cát và phần còn lại giữa đồng hồ cát và hình hộp đứng là



**A.** $\dfrac{\pi}{12-\pi}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6-\pi}$. **C.** $\dfrac{\pi}{24-\pi}$. **D.** $\dfrac{\pi}{24-2\pi}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $V_{(H)},V_{(DH)},V_{(CL)}$ lần lượt là thể tích của hộp đứng, đồng hồ cát và phần còn lại.

Cho cạnh đáy hộp bằng 6, chiều cao hộp bằng 8. Đồng hồ cát tạo bởi 2 nón bằng nhau và chiều cao nón bằng 4 (cao hộp chia 2); bán kính đáy nón bằng 3 (đáy hộp chia 2).

Ta có: $V_{(H)}=8.6^2=288$; $V_{(DH)}=2.\dfrac{1}{3}.4.\pi.3^2=24\pi$; $V_{(CL)}=V_{(H)}-V_{(DH)}=288-24\pi$.

Theo đề thì đáp án bằng $\dfrac{V_{(DH)}}{V_{(CL)}}=\dfrac{24\pi}{288-24\pi}=\dfrac{\pi}{12-\pi}$.

**Câu 11.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Cho các hàm số $f(x)=x^2-4x+m$ và $g(x)=(x^2+1)(x^2+2)^2(x^2+3)^3$. Tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3;+\infty)$ là

**A.** $[4;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $[0;3)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f(x)=x^2-4x+m$, $g(x)=(x^2+1)(x^2+2)^2(x^2+3)^3=a_{12}x^{12}+a_{10}x^{10}+...+a_2x^2+a_0$.

Suy ra $f'(x)=2x-4$, $g'(x)=12a_{12}x^{11}+10a_{10}x^9+...+2a_2x$.

Và $\left[g(f(x))\right]'=f'(x)\left[12a_{12}(f(x))^{11}+10a_{10}(f(x))^9+...+2a_2f(x)\right]$

$=f(x)f'(x)\left(12a_{12}(f(x))^{10}+10a_{10}(f(x))^8+...+2a_2\right)$.

Dễ thấy $a_{12};a_{10};...;a_2;a_0>0$ và $f'(x)=2x-4>0$, $\forall x>3$.

Do đó $f'(x)\left(12a_{12}(f(x))^{10}+10a_{10}(f(x))^8+...+2a_2\right)>0$, $\forall x>3$.

Hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(3;+\infty)$ khi $\left[g(f(x))\right]'\ge 0$, $\forall x>3 \Rightarrow f(x)\ge 0$, $\forall x>3$.

$\Leftrightarrow x^2-4x+m\ge 0$, $\forall x>3 \Leftrightarrow m\ge 4x-x^2$, $\forall x>3 \Rightarrow m\ge \max\limits_{[3;+\infty)}(4x-x^2)=3$.

Vậy $m\in[3;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 12.** Cho hàm số $f(x)=(1-m^3)x^3+3x^2+(4-m)x+2$, với $m$ là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2018;2018]$ sao cho $f(x)\ge 0,\forall x\in[2;4]$?

**A.** 2021. **B.** 4037. **C.** 2020. **D.** 2019.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

**Điều kiện cần:**

$$\begin{cases} f(2)\ge 0\\ f(4)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8(1-m^3)+12+2(4-m)+2\ge 0\\ 64(1-m^3)+48+4(4-m)+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8m^3+2m-30\le 0\\ 64m^3+4m-130\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-3)(4m^2+6m+10)\le 0\\ (4m-5)(16m^2+20m+26)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{3}{2}\\ m\le\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{5}{4}.$$

Do $m\in[-2018;2018]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2018;-2017;...;-1;0;1\}$.

**Điều kiện đủ:**

-Với $m=1$, ta có: $f(x)=3x^2+3x+2>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Thỏa mãn đề bài.

-Với $m\le 0$, ta có:

$f(x)=(1-m^3)x^3+3x^2+(4-m)x+2\Leftrightarrow f(x)=-m^3x^3-mx+x^3+3x^2+4x+2$

Khi đó: $f'(x)=-3m^3x^3-m+3x^2+6x+4=-m(3m^3x^2+1)+3x^2+6x+4$.

Do $m\le 0$ nên $-m(3m^3x^2+1)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Mà $3x^2+6x+4>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ $\Rightarrow$ Thỏa mãn đề bài

Do đó $m \le 0$ thỏa mãn.

Vậy, $m \in \{-2018;-2017;...;-1;0;1\}$ nên có tất cả 2020 số nguyên thỏa mãn bài toán.

**Câu 13.** Cho phương trình $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m=1$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để phương trình có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Giá trị của biểu thức $5a+3b$ bằng

**A.** 19 **B.** 7. **C.** 13. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x \in [-3;1]$

Từ giả thiết suy ra $m = \dfrac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}$

Đặt $g(x) = \dfrac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}$

Ta có

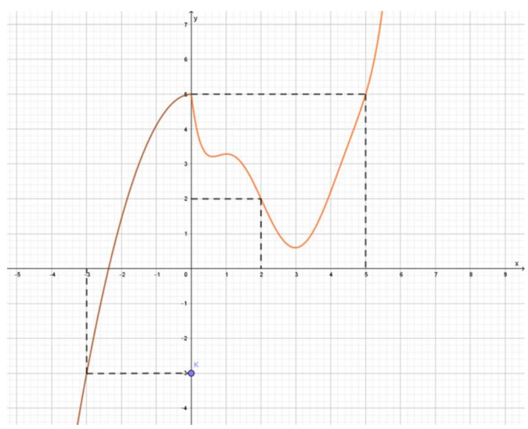
$$g'(x) = \frac{\left(\dfrac{2}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1\right)-\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{2}{2\sqrt{1-x}}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1\right)^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $[-3;1]$ do đó $a = g(-3) = \dfrac{3}{5}; b = g(1) = \dfrac{5}{3}$

Vậy $5a+3b = 3+5 = 8$

**Câu 14.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:

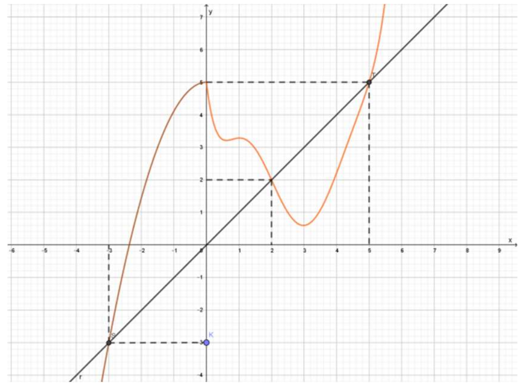


Hàm số $g(x) = f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-2;\dfrac{-1}{2}\right)$ **B.** $(-\infty;-2)$ **C.** $\left(\dfrac{-1}{2};+\infty\right)$ **D.** $\left(\dfrac{-1}{2};2\right)$

**Lời giải**

**Chọn A**



$g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$

$g(x)=f(-2x+1)+(-2x^2+2x+4)$

$g'(x)=-2f'(-2x+1)-4x+2$

$g'(x)=-2\left[f'(-2x+1)+2x-1\right]$

Để hàm số đồng biến thì $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(-2x+1)<-2x+1$

Dựa vào đồ thị ta có $2<-2x+1<5$

$\Rightarrow -2<x<\dfrac{-1}{2}$

**Câu 15.** Cho hàm số $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$. Khi đó phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực.

**A.** $6$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$ có

+) $y'=-x^2+4x-3$. Có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

+) Xét $y=1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{3}x^3+2x^2-3x+1=1 \Leftrightarrow -x^3+6x-9x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

+) Xét $y=\dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{3}x^3+2x^2-3x+1=\dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow -x^3+6x-9x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | | $-$ | | $0$ | $+$ | $0$ | | $-$ | | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{3}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{3}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(0;1) \\ x=b\in(1;3) \\ x=c\in(3;4) \end{array}\right.$.

Khi đó $f\left(f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a\in(0;1) \\ f(x)=b\in(1;3) \\ f(x)=c\in(3;4) \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

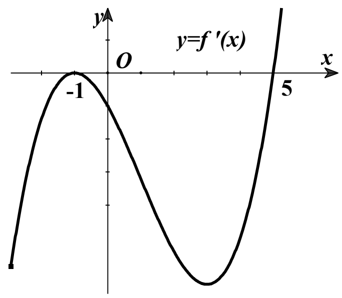
+) Phương trình $f(x)=a\ (1)$ có 3 nghiệm phân biệt .

+) Phương trình $f(x)=b\ (2)$ có 1 nghiệm khác nghiệm của phương trình $(1)$.

+) Phương trình $f(x)=c$ có 1 nghiệm khác nghiệm của phương trình $(1)$ và $(2)$.

Vậy phương trình $f(f(x))=0$ có 5 nghiệm phân biệt.

**Câu 16.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới




Để hàm số $y=f(2x^3-6x+3)$ đồng biến với mọi $x>m\ (m\in\mathbb{R})$ thì $m\ge a\sin\frac{b\pi}{c}$., trong đó $a,b,c\in\mathbb{N}^*, c>2b$. Tổng $S=3a-2b+c$ bằng

**A.** $2$. **B.** $13$. **C.** $14$. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $f(x)=x^3-3x-1$, $f(-2)=-3, f(-1)=1; f(0)=-1; f(2)=1$

$\Rightarrow f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2;2)$

$$x^3-3x-1=0\xrightarrow[x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]]{x=2\sin t}8\sin^3 t-6\sin t-1=0\Leftrightarrow \sin 3t=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3t=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\3t=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\\t=\frac{7\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.\Rightarrow t\in\left\{-\frac{\pi}{18};-\frac{5\pi}{18};\frac{7\pi}{18}\right\}$$

$y'=(6x^2-6).f'(2x^3-6x+3)$

Hàm số $y=f(2x^3-6x+3)$ đồng biến với mọi $x>m\ (m\in\mathbb{R})$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>1\\f'(2x^3-6x+3)>0\end{cases}\\\begin{cases}x^2<1\\f'(2x^3-6x+3)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$+\begin{cases}x^2<1\\f'(2x^3-6x+3)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\2x^3-6x+3<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\x^3-3x-1>0\end{cases}\text{ loại}$$

$$+\begin{cases}x^2>1\\f'(2x^3-6x+3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1\\x<-1\end{array}\right.\\2x^3-6x+3>5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1\\x<-1\end{array}\right.\\x^3-3x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>2\sin\frac{7\pi}{18}$$

$\Rightarrow a=2, b=7, c=18\ \Rightarrow P=3a-2b+c=10.$

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $e^{3m}+e^{m}=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm.

**A.** $\left(0;\frac{1}{e}\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$.

**Lời giải.**

**Chọn D**

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1+2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\frac{t^2-1}{2}$.

Ta có $t'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}},t'=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

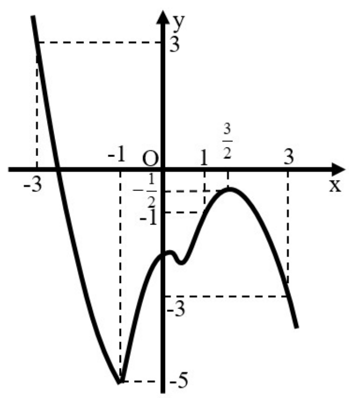
| $x$ | $-1$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $t$ | $1$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $1$ |

Vậy $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$.

Phương trình trở thành $e^{3m}+e^{m}=2t\left(1+\frac{t^2-1}{2}\right)\Leftrightarrow e^{3m}+e^{m}=t^3+t\Leftrightarrow e^{m}=t$. (sử dụng hàm đặc trưng).

Phương trình có nghiệm khi và chi khi $-1\le e^{m}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le\ln\sqrt{2}\Leftrightarrow m\in(-\infty;\frac{1}{2}\ln 2]$.

**Câu 18.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:




Hàm số $y=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

**A.** $(-3;1)$. **B.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $y'=-f'(1-x)+x-1$.

Hàm số đã cho nghịch biến $\Leftrightarrow y'\le 0\Leftrightarrow -f'(1-x)+x-1\le 0\Leftrightarrow f'(1-x)\ge-(1-x)$.

Đặt $t=1-x$, ta có: $f'(t)\ge -t$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\left[\begin{array}{l} t\le -3 \\ 1\le t\le 3\end{array}\right.$

$+\ t \le -3 \Leftrightarrow 1-x \le -3 \Leftrightarrow x \ge 4$.

$+\ 1 \le t \le 3 \Leftrightarrow 1 \le 1-x \le 3 \Leftrightarrow -2 \le t \le 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $[-2;0]$ và $[4;+\infty)$.

**Câu 19.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình tương đương $3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \dfrac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3}.\ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2}.\ln(2|x-m|+2)\ (*).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t.\ln t, t \ge 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra

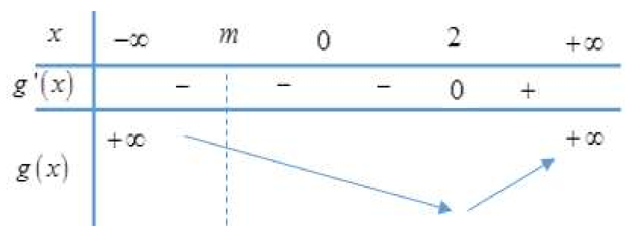
$\Leftrightarrow x^2-2x+3 = 2|x-m|+2 \Leftrightarrow g(x) = x^2-2x-2|x-m|+1 = 0$.

Có $g(x) = \begin{cases} x^2-4x+2m+1 \; khi \; x \ge m \\ x^2-2m+1 \quad khi \; x \le m \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x-4 \; khi \; x \ge m \\ 2x \quad khi \; x \le m \end{cases}$

và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \; khi \; x \ge m \\ x = 0 \; khi \; x \le m \end{array}\right.$.

Xét các trường hợp sau:

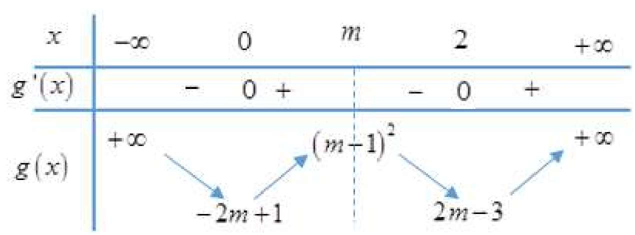
TH1: $m \le 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:




Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có $m$ thoả mãn.

TH2: $m \ge 2$ tương tự.

TH3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:




Phương trình có 3 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} (m-1)^2 = 0 \\ -2m+1 = 0 > 2m-3 \\ -2m+1 < 0 = 2m-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{1}{2} \\ m = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Cả 3 giá trị trên đều thoả mãn, nên tổng của chúng bằng 3.

**Câu 20.** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$ . Khi đó giá trị của biểu thức $T=4a-\frac{1}{b}-\sqrt{2}$ bằng

**A.** $-4$.  **B.** $-5$.  **C.** $-3$.  **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x}\Rightarrow \sin x=t^2-1$ .

Vì $-1\le \sin x\le 1\Leftrightarrow 0\le 1+\sin x\le 2\Leftrightarrow 0\le \sqrt{1+\sin x}\le \sqrt{2};\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $0\le t\le \sqrt{2}$ .

Khi đó ta có phương trình $m+\sqrt{m+1+t}=t^2-1\Leftrightarrow (m+1+t)+\sqrt{m+1+t}=t^2+t$ (2).

Xét hàm số $f(t)=t^2+t,\ t\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Rightarrow f'(t)=2t+1>0;\ \forall t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)=t^2+t$ luôn đồng biến trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Khi đó phương trình $(2)\Leftrightarrow t=\sqrt{m+1+t}\Leftrightarrow t^2=m+1+t\Leftrightarrow m=t^2-t-1$ (3).

Bảng biến thiên của hàm số $y=t^2-t-1$ trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=t^2-t-1$ | $-1$ | $\searrow$ | $\frac{5}{4}$ | $\nearrow$ | $1-\sqrt{2}$ |

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow -\frac{5}{4}\le m\le 1-\sqrt{2}$ .

Do đó $a=-\frac{5}{4};b=1-\sqrt{2}\Rightarrow T=4a-\frac{1}{b}-\sqrt{2}=-4$.

**Câu 21.** Cho phương trình $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m=1$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để phương trình có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Giá trị của biểu thức $5a+3b$ bằng

**A.** $13$.  **B.** $8$.  **C.** $19$  **D.** $7$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x\in[-3;1]$

Từ giả thiết suy ra $m=\dfrac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}$

Đặt $g(x)=\dfrac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}$

Ta có

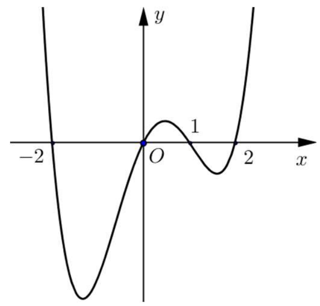
$$g'(x)=\frac{\left(\frac{2}{2\sqrt{x+3}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1\right)-\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}}-\frac{2}{2\sqrt{1-x}}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1\right)^2}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1\right)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $[-3;1]$ do đó $a=g(-3)=\frac{3}{5};b=g(1)=\frac{5}{3}$

Vậy $5a+3b=3+5=8$

**Câu 22.** Cho hàm số $y=f(x)$, biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên




Hàm số $y=f(2-x)+2019$ đồng biến trên các khoảng

**A.** $(0;1)$ và $(1;2)$.

**B.** $(0;1)$ và $(2;4)$.

**C.** $(-2;0)$ và $(1;2)$.

**D.** $(-2;0)$ và $(2;4)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-f'(2-x)$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow f'(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=-2\\2-x=0\\2-x=1\\2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\\x=1\\x=0\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $y'=-f'(2-x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'=-f'(2-x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | |

Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;1),(2;4)$.

**Câu 23.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3-10x^2-(m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tích giá trị của tất cả các phần tử thuộc $S$ bằng

**A.** $\frac{3}{2}$.

**B.** $\frac{1}{2}$.

**C.** $-2$.

**D.** $-5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2x^4-mx^2-20x-(m^2-m-20)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[m^2x^3+m^2x^2+(m^2-m)x+m^2-m-20\right]\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (*).$$

Xét $g(x)=m^2x^3+m^2x^2+(m^2-m)x+m^2-m-20$.

Nếu $g(x)=0$ không có nghiệm $x=1$ thì $f'(x)$ sẽ đổi dấu khi $x$ đi qua $1$, nên muốn $(*)$ thỏa thì điều kiện cần là

$$g(1)=1\Leftrightarrow 2m^2-m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{5}{2}\\m=-2\end{array}\right..$$

Ta cần kiểm tra xem hai giá trị tìm được có thỏa $(*)$ không.

Nếu $m=\dfrac{5}{2}$ thì $g(x)=\dfrac{25}{4}x^3+\dfrac{25}{4}x^2+\dfrac{15}{4}x-\dfrac{65}{4}=\dfrac{5}{4}(x-1)(5x^2+10x+13)$, thỏa $(*)$.

Nếu $m=-2$ thì $g(x)=4x^3+4x^2+6x-14=(x-1)(4x^2+8x+14)$, thỏa $(*)$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{5}{2};-2\right\}$.

**Câu 24.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm $\forall x\in[1;2]$ biết $f(x)=x^5+3x^3-4m$?

**A.** 17. **B.** 18. **C.** 15. **D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt: $y=\sqrt[3]{f(x)+m}\Rightarrow y^3=f(x)+m\ (1)$.

Từ đề bài suy ra: $f(y)=x^3-m\ (2)$. Lấy $(1)+(2)$ ta được: $y^3+f(y)=x^3+f(x)\ (*)$.

Xét hàm: $h(t)=t^3+f(t)=t^3+t^5+3t^3-4m\Rightarrow h'(t)=3t^2+5t^4+9t^2\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $h(t)=t^3+f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(*)\Leftrightarrow y=x\Leftrightarrow 3m=x^5+2x^3\ (**)$.

Xét hàm: $g(x)=x^5+2x^3\Rightarrow g'(x)=5x^4+6x^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[1;2]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g(1)\leq 3m\leq g(2)\Leftrightarrow 1\leq m\leq 16$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của tham số $m$.

**Câu 25.** **(TRƯỜNG THPT KINH MÔN)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$?

**A.** $m\leq 0$. **B.** $1\leq m<2$. **C.** $m\leq 0;1\leq m<2$. **D.** $m<2$.

**Lời giải**

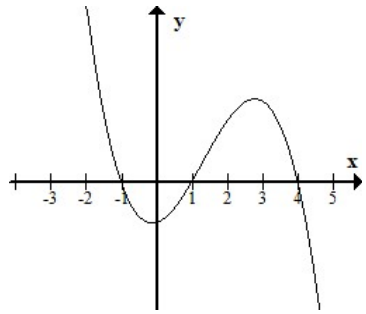
**Chọn C**

Đặt $t=\tan x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì ta được $t\in(0;1)$. Khi đó hàm số trở thành $y(t)=\dfrac{t-2}{t-m}$.

$y'(t)=\dfrac{2-m}{(t-m)^2},\forall t\in(0;1)$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$, tức là hàm số $y(t)=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'(t)>0\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ m\neq t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\ 1\leq m<2\end{array}\right.$.

**Câu 26.** **(TRƯỜNG THPT KINH MÔN)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây.




**A.** $(-1;0)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g'(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]'=2x.f'\left(x^2\right)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=0\\ f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=-1\\ x^2=1\\ x^2=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\pm2\end{array}\right.$.

Theo đồ thị: $f'\left(x^2\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x^2<1\\ x^2>4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2<1\\ x^2>4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ x>2\\ x<-2\end{array}\right.$,

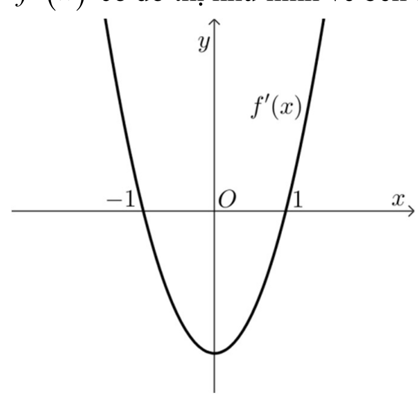
$f'\left(x^2\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2<-1\\ 1<x^2<4\end{array}\right. \Leftrightarrow 1<x^2<4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<-1\\ 1<x<2\end{array}\right.$.

Suy ra bảng xét dấu của $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x^2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

**Câu 27. (Trường THPT Thăng long Hà Nội)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq0;\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R})$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x+b}{ax+c}$. Trong các mệnh đề cho dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

**A.** $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$. **B.** $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$.

**C.** $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ nên theo đồ thị, ta có: $\begin{cases} a>0 \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ 3a-2b+c=0\ (1) \\ 3a+2b+c=0\ (2) \end{cases}$.

Lấy $(1)$ cộng $(2)$ theo vế, ta được: $6a+2c=0 \Leftrightarrow c=-3a$.

Thay $c=-3a$ vào $(1)$, ta được $b=0$.

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{x}{ax-3a}$, $a>0$. ĐKXĐ: $x\neq 3$. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Khi đó, $g'(x)=\dfrac{-3a}{(ax-3a)^2}<0\ \ \forall x\neq 3$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên hai khoảng: $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

$\Rightarrow$ Phương án $A$ đúng. Mặt khác, $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$, $(-\infty;-3)\subset(-\infty;3)$ nên 2 phương án $B$ và $D$ cũng đúng. Phương án $C$ sai vì $g(x)$ không liên tục trên $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ nên không có tính đơn điệu trên khoảng này.

**Câu 28.** **(HÀ HUY TẬP - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2019)** Cho phương trình: $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$. Tập các giá trị để bất phương trình có ba nghiệm phân biệt có dạng $(a;b)$. Tổng $a+2b$ bằng:

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $-4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0 \Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m}+x^3+x^2-2x+m=2^{x^2+x}+x^2+x(*)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=2^t\ln 2+1>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $(*) \Leftrightarrow f\left(x^3+x^2-2x+m\right)=f\left(x^2+x\right) \Leftrightarrow x^3+x^2-2x+m=x^2+x$

$\Leftrightarrow x^3-3x+m=0 \Leftrightarrow m=-x^3+3x(**)$.

Xét hàm số $g(x)=-x^3+3x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=-3x^2+3$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<m<2 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+2b=2$.

**Câu 29.** Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(3m^2+4m+5)x+2019$ và $g(x)=(m^2+2m+5)x^3-(2m^2+4m+9)x^2-3x+2$ ,với $m$ là tham số. Hỏi phương trình $g(f(x))=0$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** $1$. **B.** $9$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $g(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\left[(m^2+2m+5)x^2+x-1\right]=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ (m^2+2m+5)x^2+x-1=0 \quad (*) \end{array}\right.$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 với $\forall m$ vì: $\begin{cases} m^2+2m+5>0, \forall m \\ \Delta=1+(m^2+2m+5)>0, \forall m \\ (m^2+2m+5)2^2+2-1\neq 0, \forall m \end{cases}$.

Vậy $g(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt (1).

Mặt khác, xét hàm số $y=f(x)$ ta có: $f'(x)=x^2-2(m+1)x+(3m^2+4m+5)=\left[x-(m+1)\right]^2+2(m^2+m+2)>0, \forall m$.

$\Rightarrow$ $y=f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với $\forall m$.

Do $f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f(x)=k$ luôn có 1 nghiệm duy nhất với mỗi số $k\in\mathbb{R}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $g(f(x))=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

------------- **HẾT** -------------

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2-4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực $m$ để hàm số $g(x)=f(2x^2-12x+m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

**A.** 16. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 19.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2-4x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \quad (\text{ nghiệm kép}). \\ x=4 \end{array}\right.$$

Ta có $g'(x)=(4x-12)f'(2x^2-12x+m)$ nên:

$g'(x)=0 \Leftrightarrow (4x-12)f'(2x^2-12x+m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=-1 \\ 2x^2-12x+m=0 \\ 2x^2-12x+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3 & \\ 2x^2-12x+m=-1 & \\ h(x)=2x^2-12x+m=0 & (1) \\ g(x)=2x^2-12x+m-4=0 & (2) \end{array}\right. (\text{nghiệm kép}).$$

Ta có $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x)=0$ có đúng 5 nghiệm đơn hoặc bội lẻ. Điều này xảy ra khi PT (1) và PT (2) đều có 2 nghiệm phân biệt khác 3. Điều kiện này

tương đương với: $\begin{cases} \Delta'_g>0 \\ \Delta'_h>0 \\ g(3)\neq 0 \\ h(3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36-2m>0 \\ 36-2(m-4)>0 \\ m-18\neq 0 \\ m-22\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<18 \\ m<22 \\ m\neq 18 \\ m\neq 22 \end{cases} \Leftrightarrow m<18$.

Vậy có 17 giá trị nguyên dương của tham số thực $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ và $\begin{cases} a>0, d>2020 \\ a+b+c+d-2018<0 \end{cases}$. Số cực trị của hàm số $y=|g(x)|$ (với $g(x)=f(x)-2019$) bằng

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

**Lời giải**

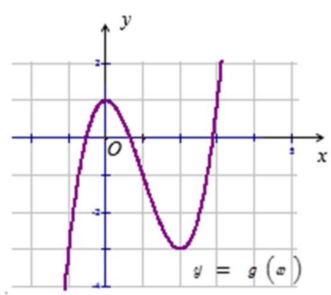
**Chọn D**

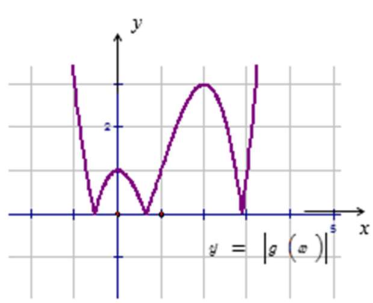
Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} f(0)=d>2020 \\ f(1)=a+b+c+d<2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0)=f(0)-2019>0 \\ g(1)=f(1)-2019<0 \end{cases}$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d-2019)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ (vì $a>0$)

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt, do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục hoành.

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có 5 cực trị.



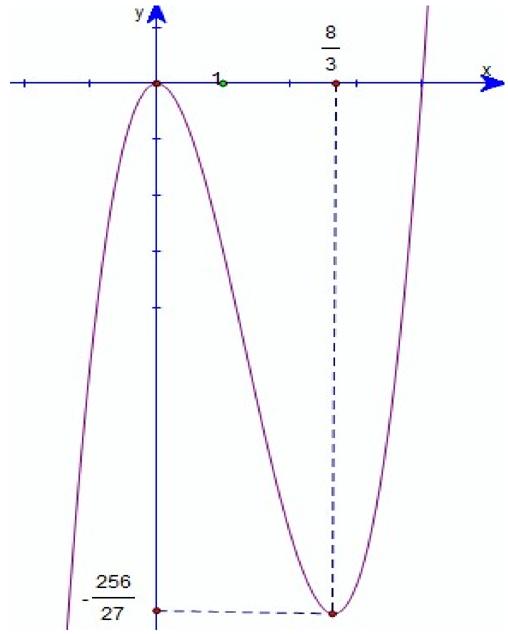
**Câu 3.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-4x^2$. Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|-1\right)$ có bao nhiêu cực trị?

**A.** 5 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 3

**Lời giải**

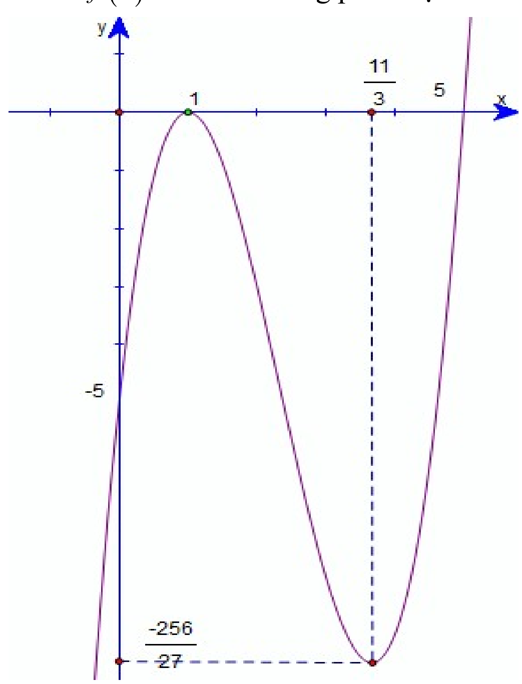
**Chọn A**

Ta có hàm số $f\left(x\right)=x^3-4x^2$ có đồ thị như hình vẽ




Hàm số $h\left(x\right)=f\left(x-1\right)$ có đồ thị suy ra từ đồ thị hàm số $f\left(x\right)=x^3-4x^2$

Bằng cách: Tịnh tiến đồ thị hàm số $f\left(x\right)=x^3-4x^2$ sang phải một đơn vị.

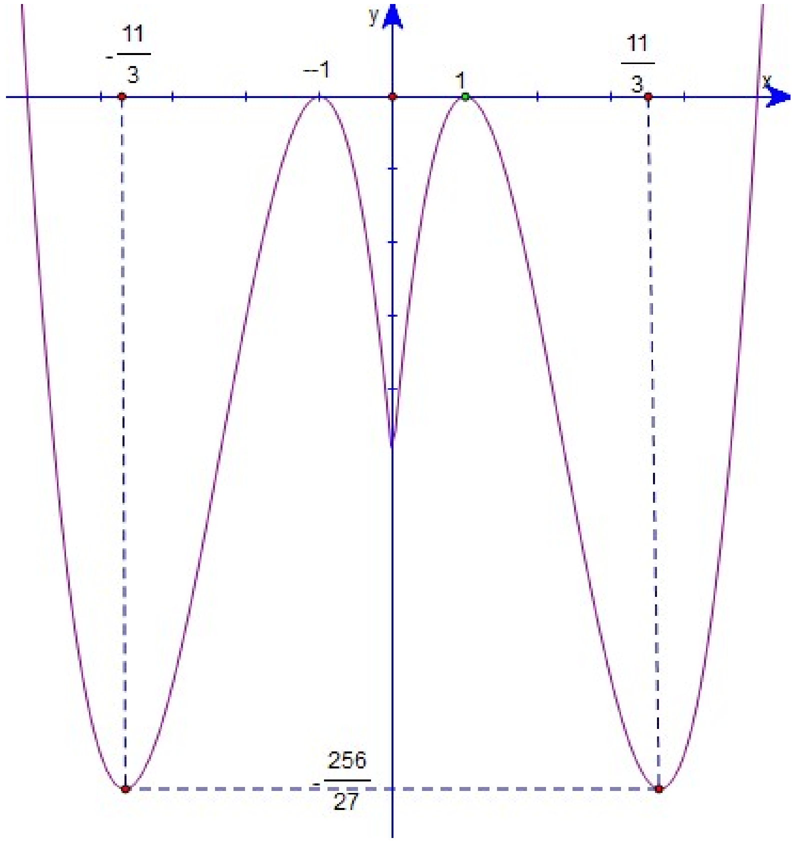



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|-1\right)$ có đồ thị suy ra từ đồ thị hàm số $h\left(x\right)=f\left(x-1\right)$

Bằng cách:

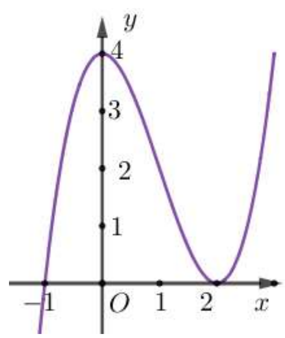
- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $h\left(x\right)=f\left(x-1\right)$ bên phải trục tung gọi là ($C_1$).

- Lấy đối xứng ($C_1$) qua trục tung.




Vây đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|-1)$ có $5$ cực trị.

**Câu 4.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(f(x))$ là.




**A.** 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $g'(x)=f'(x).f'(f(x))$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=0 \end{array}\right.$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0(*) \\ f(x)=2(**) \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (*) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Phương trình ( **) có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=m(-1<n<0) \\ x=n(0<n<1) \\ x=p(p>2) \end{array}\right.$

$g'(x)=0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=m \\ x=0 \\ x=n \\ x=2 \\ x=p \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| x | $-\infty$ | | -1 | | m | | 0 | | n | | 2 | | p | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | \| | + | \| | + | 0 | - | \| | - | 0 | + | \| | + | |
| $f'(f(x))$ | | + | 0 | - | 0 | + | \| | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + | |
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)=f(f(x))$ có 6 cực trị.

**Câu 5.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Do hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số $g(x)=f(|x|)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra $g(0)=f(0)$ là một số hữu hạn.

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$: $g(x)=f(x)$

$g'(x)=f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow (x-m)^5=0 \Leftrightarrow x=m$

- TH 1: $m=0$ thì $x=0$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội lẻ của $g'(x)$ nên $g'(x)$ đổi dấu một lần qua $x=0$ suy ra hàm số $g(x)$ có duy nhất một điểm cực trị là $x=0$.

- TH 2 $m<0$ thì $g'(x)$ vô nghiệm, suy ra $g'(x)>0$ với mọi $x>0$

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Cả hai trường hợp trên đều có: hàm số $g(x)=f(|x|)$ có duy nhất một điểm cực trị là $x=0$.

- TH 3: $m>0$ thì $x=m$ là nghiệm bội lẻ của $g'(x)$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(|x|)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-m$ | | $0$ | | $m$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | + | \|\| | $-$ | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↘ | CT | ↗ | CĐ | ↘ | CT | ↗ | |

- Lại có $m\in[-5;5]$ và $m$ nguyên nên $m\in\{1,2,3,4,5\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của $m$.

**Câu 6.** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m$, với $m$ là tham số. Gọi $A$, $B$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I\left(2;-2\right)$. Giá trị thực $m<1$ để ba điểm $I$, $A$, $B$ tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

**A.** $m=\dfrac{5}{17}$. **B.** $m=\dfrac{2}{17}$. **C.** $m=\dfrac{3}{17}$. **D.** $m=\dfrac{4}{17}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m\Rightarrow y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m+1\\x=m-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-4m-2\\y=-4m+2\end{array}\right.$.

Khi đó đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

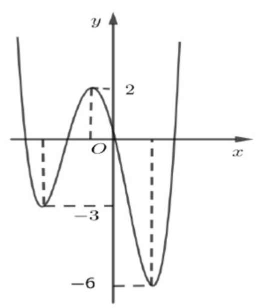
$A\left(m+1;-4m-2\right),B\left(m-1;-4m+2\right)\Rightarrow\overrightarrow{IA}\left(m-1;-4m+4\right),\ \overrightarrow{IB}\left(m-3;-4m\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}\left(-2;4\right)\Rightarrow AB=2\sqrt{5}$ do đó $AB$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $\Delta IAB$ nên $\widehat{AIB}=90^\circ$ hay $AI\perp BI\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$

$\Leftrightarrow\left(m-1\right)\left(m-3\right)+\left(-4m\right)\left(-4m+4\right)=0\Leftrightarrow 17m^2-20m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{3}{17}\end{array}\right.$.

Do $m<1$ nên chọn $m=\dfrac{3}{17}$.

**Câu 7.** Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$.




Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=\left|f\left(x+1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đồ thị của hàm số $y=\left|f\left(x+1\right)+m\right|$ được suy ra từ đồ thị $\left(C\right)$ ban đầu như sau:

+ Tịnh tiến $\left(C\right)$ sang trái một đơn vị, sau đó tịnh tiến lên trên (hay xuống dưới) $m$ đơn vị. Ta được đồ thị $\left(C'\right): y=f\left(x+1\right)+m$.

+ Phần đồ thị $\left(C'\right)$ nằm dưới trục hoành, lấy đối xứng qua trục $Ox$ ta được đồ thị của hàm số $y=\left|f\left(x+1\right)+m\right|$.

Ta được bảng biến thiên của của hàm số $y=\left|f\left(x+1\right)+m\right|$ như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3+m$ | $\nearrow$ | $2+m$ | $\searrow$ | $-6+m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Để hàm số $y=\left|f\left(x+1\right)+m\right|$ có $5$ điểm cực trị thì đồ thị của hàm số $\left(C'\right): y=f\left(x+1\right)+m$ phải cắt trục $Ox$ tại $2$ hoặc $3$ giao điểm.

+ TH1: Tịnh tiến đồ thị $\left(C'\right): y=f\left(x+1\right)+m$ lên trên. Khi đó $\begin{cases} m>0 \\ -3+m\geq 0 \\ -6+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\leq m<6$.

+ TH2: Tịnh tiến đồ thị $\left(C'\right): y=f\left(x+1\right)+m$ xuống dưới. Khi đó $\begin{cases} m<0 \\ 2+m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq -2$.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của $m$ là $3;4;5$.

**Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

**A.** $m>2$.

**B.** $m\in\left(2;\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$.

**C.** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<-1$.

**D.** $m<-1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Cách 1: Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ \left(1\right)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.\ (*)$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là:

$y=\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)x+\frac{1}{3}m\left(m+2\right)$.

Gọi $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1+y_2>0$ và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý vi-et ta có $x_1+x_2=2m$

Nên $y_1+y_2>0\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)\left(x_1+x_2\right)+\frac{2}{3}m\left(m+2\right)>0$

$\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)\left(2m\right)+\frac{2}{3}m\left(m+2\right)>0$

$\Leftrightarrow 2m\left(-2m^2+3m+6\right)>0$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \dfrac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \dfrac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(**)$.

Để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y = 0$ có $1$ nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0\,(2)$ có $1$ nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3mx + 3m + 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0\ (3) \end{array}\right.$.

Để phương trình $(1)$ có $1$ nghiệm đơn duy nhất thì phương trình $(3)$ vô nghiệm, khi đó điều kiện là $\Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}(***)$.

Kết hợp $(*), (**), (***)$ ta được tập các giá trị của $m$ thỏa mãn là $2 < m < \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$ .

**Cách 2:** Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. (*)$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y = 0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0\,(2)$ có $1$ nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3mx + 3m + 6\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0\ (3) \end{array}\right.$.

Để phương trình $(1)$ có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình $(3)$ vô nghiệm, khi đó điều kiện $: \Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}(**)$.

Để giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương:

$y' = x^2 - 2mx + m + 2, y'' = 2x - 2m$

$y'' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = m$

Ta có: $y(m) > 0 \Rightarrow \dfrac{m^3}{3} - m^3 + m(m+2) > 0$

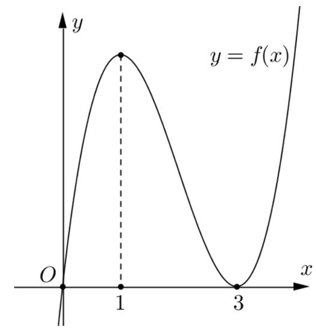
$\Leftrightarrow m\left(-2m^2 + 3m + 6\right) > 0$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \dfrac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \dfrac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(***)$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của $m$ thỏa mãn là $2 < m < \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$

<u>Bình luận</u> : đáp án của đề gốc bị sai chúng tôi đã thảo luận và sửa lại đáp án như trên .

**Câu 9.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



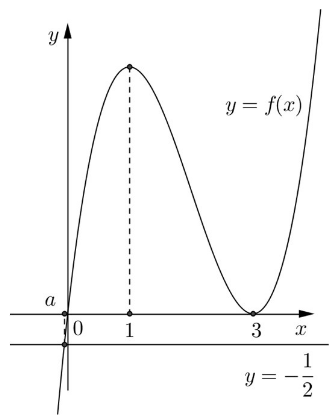

Tìm tất cả giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $h\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

**A.** $m \geq \dfrac{1}{4}$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m > \dfrac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)+f(x)+m$. Ta có $g'(x)=2f'(x)f(x)+f'(x)=f'(x)\left(2f(x)+1\right)$.




Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$, suy ra $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=a<0 \end{array}\right.$.

Ta có $g\left(a\right)=f^2\left(a\right)+f\left(a\right)+m=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+m=m-\dfrac{1}{4}$ và $g\left(3\right)=f^2\left(3\right)+f\left(3\right)+m=m$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)$

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $m-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $g(1)$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | |

Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có đúng $3$ điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm bội lẻ, suy ra $m-\dfrac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{4}$.

**------------- HẾT -------------**

**Câu 10.** Gọi $m_0$ là giá trị của tham số $m$ để đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính bằng $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho diện tích tam giác $IAB$ đạt giá trị lớn nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng:

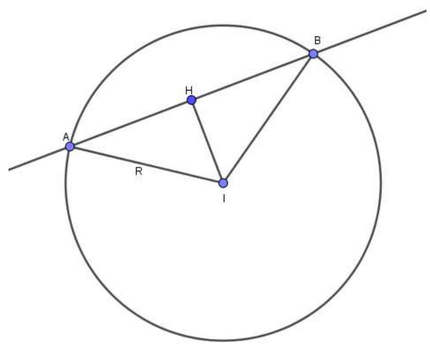
**A.** $m_0 \in (3;4)$. **B.** $m_0 \in (0;1)$. **C.** $m_0 \in (1;2)$. **D.** $m_0 \in (2;3)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y' = 3x^2 - 6m$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$. Đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Do đó $m > 0$.

Ta có $y = \frac{x}{3}.\left(3x^2 - 6m\right) - 4mx + 4 \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $(\Delta)$ đi qua điểm cực đại và cực




tiểu của đồ thị hàm số đã cho là: $y = -4mx + 4 \Leftrightarrow 4mx + y - 4 = 0$.

Đường thẳng $(\Delta)$ cắt đường tròn đã cho tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho $I$, $A$, $B$ là ba đỉnh của một tam giác $\Leftrightarrow 0 < d\left(I;(\Delta)\right) < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{|4m-4|}{\sqrt{16m^2+1}} < \sqrt{2}$ $(*)$.

Gọi $H$ là trung điểm đoạn $AB$ $\Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2}IH.AB = IH.AH = IH.\sqrt{R^2 - IH^2} = IH.\sqrt{2 - IH^2}$

$= \sqrt{IH^2.\left(2 - IH^2\right)} \le \frac{IH^2 + \left(2 - IH^2\right)}{2} = 1 \Rightarrow S_{IAB} \le 1$.

Vậy diện tích tam giác $IAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1 $\Leftrightarrow IH^2 = 2 - IH^2 \Leftrightarrow IH = 1$

$\Leftrightarrow |4m-4| = \sqrt{16m^2+1} \Leftrightarrow (4m-4)^2 = 16m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Vậy $m_0 = \frac{15}{32}$ nên $m_0 \in (0;1)$.

**Câu 11.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ $\left(|m| < 5\right)$ để hàm số $y = \left|x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2\right|$ có ba điểm cực tiểu?

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $6$. **D.** $3$.

**Lời giải.**

**Chọn D**

Xét hàm: $y = x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $y' = 3x^2 - 2(m-2)x - m$.

Nhận xét :

- Mỗi giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục $Ox$ sẽ có một điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có $y_{cd}.y_{ct} \ge 0$ thì hàm số $y = |f(x)|$ chỉ có hai cực tiểu

- Nếu hàm số $y = f(x)$ không có cực trị thì hàm số $y = |f(x)|$ chỉ có một cực tiểu .

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{cd}.y_{ct} < 0$

$\Leftrightarrow x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (x - m)(x^2 + 2x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m^2 + 3m \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq \{0; -3\} \end{cases}$$

Theo đề ra ta có: $m \in Z,\ |m| < 5 \Leftrightarrow -5 < m < 5$

Kết hợp điều kiện trên ta được: $\begin{cases} m \in Z \\ -5 < m < 1 \\ m \neq 0; m \neq -3 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-4; -2; -1\}$ .

**Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | -2 | $\nearrow$ | -1 | $\searrow$ | -2 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ là

**A.** 5 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 9 .

**Lời giải**

**Chọn A**

$g'(x) = 6f'(x)f^2(x) + 8f'(x)f(x) = 2f'(x)f(x)(3f(x) + 4)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. .$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$+\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right. .$$

+ Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1$ và $x_2$ (giả sử $x_1 < x_2$). Suy ra $x_1 < -1$ và $1 < x_2$ .

+ Phương trình $f(x) = -\dfrac{4}{3}$ có 4 nghiệm $x_3$ , $x_4$ , $x_5$ $x_6$ (giả sử $x_3 < x_4 < x_5 < x_6$). Và 4 giá trị thỏa mãn yêu cầu sau: $x_1 < x_3 < -1; -1 < x_4 < 0; 0 < x_5 < 1; 1 < x_6 < x_2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $x1$ | | $x3$ | | $-1$ | | $x4$ | | $0$ | | $x5$ | | $1$ | | $x6$ | | $x2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3f(x)+4$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực tiểu.

**Câu 13.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3\left(x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có $5$ điểm cực trị?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Nhận xét:

+) $x = 1$ là nghiệm bội ba của phương trình $(x-1)^3 = 0$.

+) Hàm $g(x) = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng.

Do đó hàm $g(x) = f(|x|)$ có $5$ điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0$ có nghiệm kép dương khác $1$ $(*)$ hoặc phương trình $x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khác $1$ $(**)$.

Giải $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (4m-5)^2 - 4(m^2 - 7m + 6) = 0 \\ 0 < \dfrac{-(4m-5)}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{6} \notin \mathbb{Z}$ (loại).

Giải $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 < 0 \\ 1 + (4m-5) + m^2 - 7m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (1;6) \\ m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3;4;5\}$.

Vậy có $3$ giá trị $m$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 14.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực $m$ để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

**A.** 16. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 19.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2 - 4x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=4 \end{array}\right. \quad \text{( nghiệm kép).}$$

Ta có $g'(x)=(4x-12)f'(2x^2-12x+m)$ nên:

$g'(x)=0 \Leftrightarrow (4x-12)f'(2x^2-12x+m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=-1 \\ 2x^2-12x+m=0 \\ 2x^2-12x+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3 & \\ 2x^2-12x+m=-1 & \\ h(x)=2x^2-12x+m=0 & (1) \\ g(x)=2x^2-12x+m-4=0 & (2) \end{array}\right. \text{(nghiệm kép).}$$

Ta có $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x)=0$ có đúng 5 nghiệm đơn hoặc bội lẻ. Điều này xảy ra khi PT (1) và PT (2) đều có 2 nghiệm phân biệt khác 3. Điều kiện này tương đương với: $\begin{cases} \Delta'_g>0 \\ \Delta'_h>0 \\ g(3)\neq 0 \\ h(3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36-2m>0 \\ 36-2(m-4)>0 \\ m-18\neq 0 \\ m-22\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<18 \\ m<22 \\ m\neq 18 \\ m\neq 22 \end{cases} \Leftrightarrow m<18$.

Vậy có 17 giá trị nguyên dương của tham số thực $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 15.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left|f(x+h)-f(x-h)\right|\leq h^2, \forall x\in\mathbb{R}, \forall h>0$. Đặt $g(x)=\left[x+f'(x)\right]^{2019}+\left[x+f'(x)\right]^{29-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin^2 x-1$, $m$ là tham số nguyên và $m<27$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ sao cho hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$. Tính tổng bình phương các phần tử của $S$.

**A.** $58$. **B.** $100$. **C.** $50$. **D.** $108$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\forall h>0$ thì $\left|f(x+h)-f(x-h)\right|\leq h^2 \Leftrightarrow -h\leq \dfrac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}\leq h$

$\Leftrightarrow -h\leq \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}\leq h$.

Suy ra $\lim\limits_{h\to 0^+}(-h)\leq \lim\limits_{h\to 0^+}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right]\leq \lim\limits_{h\to 0^+} h$

$\Rightarrow 0\leq f'(x)+f'(x)\leq 0 \Rightarrow f'(x)=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $g(x)=x^{2019}+x^{29-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin^2 x-1$

$\Rightarrow g'(x)=2019x^{2018}+(29-m)x^{28-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin 2x$

$\Rightarrow g''(x)=2019.2018.x^{2017}+(29-m)(28-m)x^{27-m}-2\left(m^4-29m^2+100\right)\cos 2x$

Dễ thấy $g'(0)=0, \forall m<27$.

Xét $g''(0)=-2\left(m^4-29m^2+100\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2=4 \\ m^2=25 \end{array}\right.$.

* Khi $m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$:

\+ $m=2$ ta có $g(x)=x^{2019}+x^{27}-1$ có $g'(x)=x^{26}\left(2019x^{1992}+27\right)$ không đổi dấu khi qua $x=0$.

+ $m=-2$ ta có $g(x)=x^{2019}+x^{31}-1$ có $g'(x)=x^{30}\left(2019x^{1988}+31\right)$ không đổi dấu khi qua $x=0$.

* Khi $m^2=25\Leftrightarrow m=\pm 5$:

+ $m=5$ ta có $g(x)=x^{2019}+x^{24}-1$ có $g'(x)=x^{23}\left(2019x^{1995}+24\right)$ đổi dấu khi qua $x=0$ và $x=-\sqrt[1995]{\dfrac{24}{2019}}$. Trường hợp này hàm đạt cực tiểu tại $x=0$.

+ $m=-5$ ta có $g(x)=x^{2019}+x^{34}-1$ có $g'(x)=x^{33}\left(2019x^{1985}+34\right)$ đổi dấu khi qua $x=0$ và $x=-\sqrt[1985]{\dfrac{34}{2019}}$. Trường hợp này hàm đạt cực tiểu tại $x=0$.

*Nếu $4<m^2<25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<m<5\\-5<m<-2\end{array}\right.$ thì $g''(0)>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

*Nếu $m^2<4$ hoặc $m^2>25$ thì $g''(0)<0$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Vậy các giá trị nguyên của $m<27$ để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ là $\mathrm{S}=\{-5;-4;-3;3;4;5\}$.

Tổng bình phương các phần tử của $\mathrm{S}$ là $100$.

**Câu 16.** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m$, với $m$ là tham số. Gọi $A$, $B$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Giá trị thực $m<1$ để ba điểm $I$, $A$, $B$ tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

**A.** $m=\dfrac{4}{17}$. **B.** $m=\dfrac{5}{17}$. **C.** $m=\dfrac{2}{17}$. **D.** $m=\dfrac{3}{17}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m\Rightarrow y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m+1\\x=m-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-4m-2\\y=-4m+2\end{array}\right.$.

Khi đó đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

$A(m+1;-4m-2),B(m-1;-4m+2)\Rightarrow\overrightarrow{IA}(m-1;-4m+4),\ \overrightarrow{IB}(m-3;-4m)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-2;4)\Rightarrow AB=2\sqrt{5}$ do đó $AB$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $\Delta IAB$ nên $\widehat{AIB}=90^\circ$ hay $AI\perp BI\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$

$\Leftrightarrow(m-1)(m-3)+(-4m)(-4m+4)=0\Leftrightarrow 17m^2-20m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{3}{17}\end{array}\right.$.

Do $m<1$ nên chọn $m=\dfrac{3}{17}$.

**Câu 17.** Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-4x+3\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có $5$ điểm cực trị?

**A.** $17$. **B.** $15$. **C.** $18$. **D.** $16$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\\x=3\end{array}\right.$, $x=2$ là nghiệm kép nên khi qua giá trị $x=2$ thì $f'(x)$

không bị đổi dấu.

Đặt $g(x)=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ khi đó $g'(x)=f'(u).(2x-10)$ với $u=x^2-10x+m+9$.

Nên $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-10=0 \\ \left(x^2-10x+m+9-2\right)^2=0 \\ x^2-10x+m+9=1 \\ x^2-10x+m+9=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \left(x^2-10x+m+9-2\right)^2=0 \\ x^2-10x+m+8=0\ (1) \\ x^2-10x+m+6=0\ (2) \end{array}\right.$

Hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có $5$ điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu $5$ lần

Hay phương trình $(1)$ và phương trình $(2)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \\ h(5) \neq 0 \\ p(5) \neq 0 \end{cases}$, (Với $h(x)=x^2-10x+m+8$ và $p(x)=x^2-10x+m+6$).

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17-m>0 \\ 19-m>0 \\ -17+m \neq 0 \\ -19+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<17$.

Vậy có $16$ giá trị nguyên dương $m$ thỏa mãn.

**Câu 18.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x+3)\left(x^2+2mx+5\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có đúng 1 điểm cực trị?

**A.**      **B.**      **C.**      **D.**

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có đồ thị đối xứng qua trục nên là điểm cực trị của hàm số. Vậy để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ thì $f'(x)=(x+1)^2(x+3)\left(x^2+2mx+5\right)$ phải không đổi dấu với

với mọi

với mọi .

Xét với . Ta có .

Bảng biến thiên của hàm số

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\sqrt{5}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Khi đó với mọi . Vậy có số nguyên âm thỏa mãn là , .

**Câu 19.** Có bao nhiêu số nguyên để hàm số có 5 điểm cực trị?

**A.** .  **B.** .  **C.** .  **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hàm số .

Ta có . cho .

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $48+m$ | ↘ | $-48+m$ | ↗ | $+\infty$ |

Để hàm số có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số phải cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi có hai điểm cực trị thỏa .

Ta có .

Vì là số nguyên nên . Vậy có số.

**Câu 20.** Cho hàm số có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2018$ | ↘ | $-2020$ | ↗ | $+\infty$ |

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** .  **B.**   **C.** .  **D.**

**Lời giải**

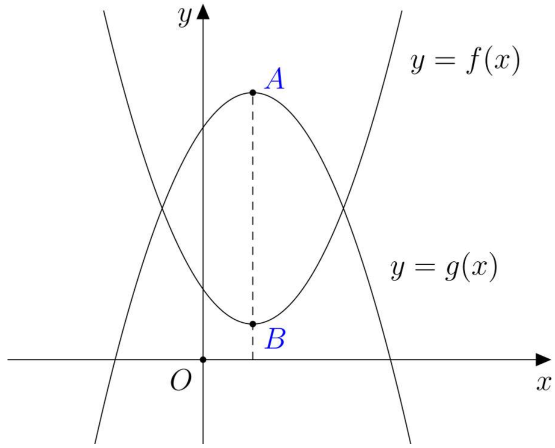
**Chọn C**

Ta có bảng biến thiên của các hàm số như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | | | $2017$ | | | | $2021$ | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x-2018)$ | $-\infty$ | | ↗ | | $2018$ | | ↘ | | $-2020$ | | ↗ | | $+\infty$ |
| $f(x-2018)+2019$ | $-\infty$ | | ↗ | | $4037$ | | ↘ | | $-1$ | | ↗ | | $+\infty$ |
| $\lvert f(x-2018)+2019\rvert$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $4037$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có điểm cực trị.

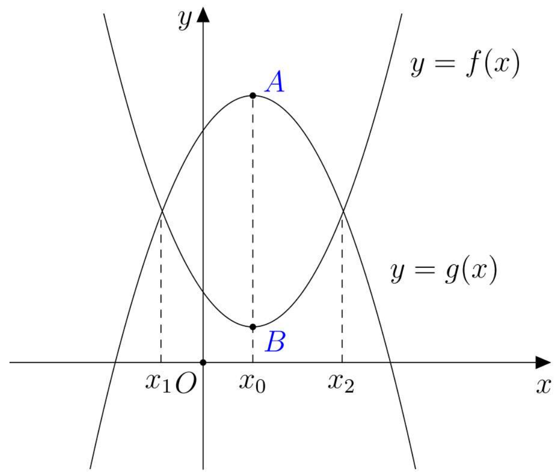
**Câu 21.** **(Sở GD- ĐT Quảng Nam)** Cho hai hàm đa thức , có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị là , đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị là và . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thuộc khoảng để hàm số có đúng điểm cực trị?




**A.**   **B.**   **C.**   **D.**

**Lời giải**

**Chọn B**




Đặt , ta có: ; ;
hoặc ( );
.

Bảng biến thiên của hàm số là:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{7}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra bảng biến thiên của hàm số là:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_0$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |
| $k(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{7}{4}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Do đó, hàm số cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số bằng tổng số điểm cực trị của hàm số và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình , mà hàm số cũng có ba điểm cực trị nên hàm số có đúng năm điểm cực trị khi phương trình có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số , phương trình có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi .

Vì , và nên .

**Câu 22.** Cho hàm số ( là tham số). Gọi , là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và . Tổng tất cả các giá trị của để ba điểm , , tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng là

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định .

.

Cho .

Vì nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt .

Gọi , .

Suy ra , , .

Phương trình đường thẳng qua và có vectơ pháp tuyến là

.

Suy ra

Khi đó .

Mặt khác .

.

Vậy

**Câu 23.** Cho hàm số với là tham số thực. Biết rằng hàm số có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi . Tích bằng

**A.** **B.** **C.** **D.**

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số có số điểm cực trị lớn hơn 5.

Hàm số có 3 điểm cực trị dương.

Phương trình có 3 nghiệm dương phân biệt.

**------------- HẾT -------------**

**Câu 1.** **(Sở GD- ĐT Quảng Nam)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc khoảng $(-1;7)$ để phương trình $(m-1)x+(m+2)\sqrt{x(x^2+1)}=x^2+1$ có nghiệm?

**A.** $5$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

ĐK: $x\ge 0$. Ta có:

$(m-1)x+(m+2)\sqrt{x(x^2+1)}=x^2+1 \Leftrightarrow m\left(x+\sqrt{x(x^2+1)}\right)=x^2+1-2\sqrt{x(x^2+1)}+x$

$\Leftrightarrow m\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow m\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)^2}{x}$ (vì $x=0$ không thỏa mãn phương trình)

$\Leftrightarrow m\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}+1\right)=\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-1\right)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-1\right)^2}{\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}+1}$

Đặt $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$ ($y\ge\sqrt{2}$), ta được: $m=\dfrac{y^2-2y+1}{y+1} \Leftrightarrow m=(y+1)+\dfrac{4}{y+1}-4$ (*).

Với $y\ge\sqrt{2}$, ta có:

$(y+1)+\dfrac{4}{y+1}-4=\left[\dfrac{4}{3+2\sqrt{2}}(y+1)+\dfrac{4}{y+1}\right]+\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3+2\sqrt{2}}(y+1)-4$

$\ge\dfrac{8}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-4=\dfrac{2\sqrt{2}+7}{\sqrt{2}+1}-4=5\sqrt{2}-7$

Do đó, phương trình (*) có nghiệm khi $m\ge 5\sqrt{2}-7$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m\ge 5\sqrt{2}-7$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\ge 5\sqrt{2}-7$ và $m\in(-1;7)$ nên $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

* C2: ĐK: $x\ge 0$.

Ta có: $(m-1)x+(m+2)\sqrt{x(x^2+1)}=x^2+1 \Leftrightarrow (m-1)\dfrac{x}{x^2+1}+(m+2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}=1$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ ($0\le t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$), ta được phương trình:

$(m-1)t^2+(m+2)t=1 \Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2t+1}{t^2+t}$ (do $t=0$ không thỏa mãn phương trình)

Xét $f(t)=\dfrac{t^2-2t+1}{t^2+t}$ ($0<t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$), ta có: $f'(t)=\dfrac{3t^2-2t-1}{(t^2+t)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(t)\ge 5\sqrt{2}-7$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m\ge 5\sqrt{2}-7$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\ge 5\sqrt{2}-7$ và $m\in(-1;7)$ nên $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

**Câu 2.** **(HÀ HUY TẬP - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2019)** Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ với $a,b$ là tham số. Gọi $M$ là giá trị lớn nhất của tham số trên $[-1;3]$. Khi $M$ nhận giá trị nhỏ nhất có thể tính được $a+2b$

**A.** $-4$. **B.** $2$. $3$ **D.** $4$.

**C.**

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có
$$\begin{aligned}&M\ge|f(-1)|=|1-a+b|\\&M\ge|f(3)|=|9+3a+b|\\&M\ge|f(1)|=|1+a+b|2\\&2M\ge|-2-2a-2b|\end{aligned}$$

Từ đó $4M\ge|f(-1)|+2|f(1)|+|f(3)|\ge|f(-1)+2f(1)+f(3)|=8$

Nên $M\ge 4$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}|1-a+b|=2\\|2+2a+2b|=2\\|9+3a+b|=2\end{cases}$ và $9+3a+b;1-a-b;1+a+b$ cùng dấu

Từ đó suy ra $\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$ Nên $a+2b=-4$

**Câu 3.** Xét hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ với $a,b$ là tham số. Gọi $M$ là giá trị lớn nhất của tham số trên $[-1;3]$. Khi $M$ nhận giá trị nhỏ nhất có thể tính được $a+2b$

**A.** $4$. **B.** $-4$. **C.** $2$. **D.** $3$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có
$$\begin{aligned}&M\ge|f(-1)|=|1-a+b|\\&M\ge|f(3)|=|9+3a+b|\\&M\ge|f(1)|=|1+a+b|2\\&2M\ge|-2-2a-2b|\end{aligned}$$

Từ đó $4M\ge|f(-1)|+2|f(1)|+|f(3)|\ge|f(-1)+2f(1)+f(3)|=8$

Nên $M\ge 4$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}|1-a+b|=2\\|2+2a+2b|=2\\|9+3a+b|=2\end{cases}$ và $9+3a+b;1-a-b;1+a+b$ cùng dấu

Từ đó suy ra $\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$ Nên $a+2b=-4$

**Câu 4.** Cho hai số thực $a$, $b$ thỏa mãn $a>0$, $0<b<2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{(2b)^a}{(2^a-b^a)^2}+\dfrac{2^a+2.b^a}{2.b^a}$.

**A.** $P_{\min}=\dfrac{7}{4}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{13}{4}$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{9}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Do $0<b<2$ và $a>0$ nên $0<b^a<2^a$.

$P=\dfrac{2^a.b^a}{(2^a-b^a)^2}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{2^a}{b^a}+2=\dfrac{\dfrac{2^a}{b^a}}{\left[\left(\dfrac{2^a}{b^a}\right)-1\right]^2}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{2^a}{b^a}+1$. Đặt $t=\dfrac{2^a}{b^a}$, khi đó ta được $t>1$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)=\dfrac{t}{(t-1)^2}+\dfrac{1}{2}t+1$ với $t\in(1;+\infty)$

Có $f'(t)=\dfrac{t^3-3t^2+t-3}{2(t-1)^3}$

$f'(t)=0\Rightarrow t^3-3t^2+t-3=0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+1)=0\Leftrightarrow t=3$ (do $t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$).

$\lim\limits_{t\to1^+}f(t)=+\infty$; $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\dfrac{13}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta được $P_{\min}=\dfrac{13}{4}$. Dấu bằng diễn ra khi và chỉ khi

$t=3\Rightarrow\dfrac{2^a}{b^a}=3\Leftrightarrow 3.b^a=2^a$ với $0<b<2$ và $a>0$.

**Câu 5.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(0;2)$. **B.** $(-2017;0)$. **C.** $(-\infty;-2017)$. **D.** $(2017;+\infty)$.

**Lời giải.**

**Chọn C**

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | ↗ | $3$ | ↘ | $-2018$ | ↗ | |

Đặt $t = x + 2017$.

Ta có $y = f(x+2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017.2018 = g(t)$.

$g'(t) = f'(t) + 2018$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty;0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty;0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0$ mà $x_0 + 2017 \in (-\infty;0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty;-2017)$.

**Câu 6.** Xét hàm số $f(x) = \left|x^2 + ax + b\right|$, với $a$, $b$ là tham số. Gọi $M$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi $M$ nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $-4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\max\{|A|,|B|\} \ge \dfrac{|A+B|}{2}$ $(1)$. Dấu "$=$" xảy ra khi $A = B$.

Và có $\max\{|A|,|B|\} \ge \dfrac{|A-B|}{2}$ $(2)$. Dấu "$=$" xảy ra khi $A = -B$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + ax + b$, có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{a}{2}$.

**Trường hợp một:** $-\dfrac{a}{2} \notin [-1;3] \Leftrightarrow a \notin [-6;2]$. Khi đó $M = \max\{|1-a+b|,|9+3a+b|\}$.

Áp dụng bất đẳng thức $(2)$ ta có $M \ge |4+2a| > 8$.

**Trường hợp hai:** $-\dfrac{a}{2} \in [-1;3] \Leftrightarrow a \in [-6;2]$. Khi đó $M = \max\left\{|1-a+b|,|9+3a+b|,\left|b-\dfrac{a^2}{4}\right|\right\}$.

Áp dụng bất đẳng thức $(1)$ và $(2)$ ta có $M \ge \max\left\{|5+a+b|,\left|b-\dfrac{a^2}{4}\right|\right\}$

$\Leftrightarrow M \ge \dfrac{1}{8}\left|20+4a+a^2\right| \Leftrightarrow M \ge \dfrac{1}{8}\left|16+(a+2)^2\right|$.

Suy ra $M \ge 2$.

Vậy $M$ nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là $M = 2$ khi $\begin{cases} a = -2 \\ 5 + a + b = \dfrac{a^2}{4} - b \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$.

Do đó $a + 2b = -2 + 2.(-1) = -4$.

**Câu 7.** **(Nguyễn Khuyến 18-19)** Gọi $S$ là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 3. Số phần tử của $S$ là.

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^3-3x+m$ trên $\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-3$; $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm1$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $m+2$ | $\searrow$ | $m$ | $\searrow$ | $m-2$ | $\nearrow$ | $m+2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Đồ thị của hàm số $y=\left|g(x)\right|$ thu được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành của $(C): y=g(x)$ , còn phần đồ thị phía dưới trục hoành của $(C): y=g(x)$ thì lấy đối xứng qua trục hoành lên trên. Do đó, ta có biện luận sau đây:

Ta xét các trường hợp sau:

+) $m+2\le0 \Leftrightarrow m\le-2$. Khi đó $m-2<m<m+2\le0$ , nên $\underset{[0;2]}{Max}\,y=\underset{[0;2]}{Max}\{\,|\text{m-2}|,|\text{m}|,|\text{m+2}|\,\}=|m-2|=2-m$. Như vậy $\underset{[0;2]}{Max}\,y=3 \Leftrightarrow 2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (loại).

+) $m<0<m+2 \Leftrightarrow -2<m<0$. Khi đó $m-2<m<0<m+2$ , nên $\underset{[0;2]}{Max}\,y=\underset{[0;2]}{Max}\{\,|\text{m-2}|,|\text{m}|,\text{m+2}\,\}=\underset{[0;2]}{Max}\{\text{2-m,-m,m+2}\}=2-m$. Như vậy $\underset{[0;2]}{Max}\,y=3 \Leftrightarrow 2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

+) $m=0$: $\underset{[0;2]}{Max}\,y=2\ne3$ (loại).

+) $m-2<0<m<m+2$ Ta có $\underset{[0;2]}{Max}\,y=\underset{[0;2]}{Max}\{\,|\text{m-2}|,|\text{m}|,\text{m+2}\,\}=\underset{[0;2]}{Max}\{\text{2-m,m,m+2}\}=m+2$, do đó $\underset{[0;2]}{Max}\,y=3 \Leftrightarrow m+2=3 \Leftrightarrow m=1$. (thỏa mãn).

+) $0\le m-2<m<m+2$. Ta có $\underset{[0;2]}{Max}\,y=\underset{[0;2]}{Max}\{\,|\text{m-2}|,|\text{m}|,\text{m+2}\,\}=\underset{[0;2]}{Max}\{\text{2-m,m,m+2}\}=m+2$, do đó $\underset{[0;2]}{Max}\,y=3 \Leftrightarrow m+2=3 \Leftrightarrow m=1$. (thỏa mãn).

Suy ra $S=\left\{-1;1\right\}$. Vậy chọn B.

**Câu 8.** **(Thi Thử Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1. 2018-2019)** Cho các số thực $x$, $y$ thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f\left(t\right)=2t^3-3t^2+1$. Gọi $M$ ,$m$ tương ứng là GTLN và GTNN của $Q=f\left(\dfrac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng:

**A.** $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-4\sqrt{2}$. **D.** $-4-2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=\dfrac{5x-y+2}{x+y+4}$. Theo giả thiết, $x^2-xy+y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}\left(x-y\right)^2+\dfrac{1}{4}\left(x+y\right)^2=1$

nên ta đặt $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\\ \sin\varphi=\dfrac{1}{2}(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi\\ x+y=2\sin\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi+\sin\varphi\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi+\sin\varphi\end{cases}$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

Khi đó, $t=\dfrac{2\sqrt{3}\cos\varphi+4\sin\varphi+2}{2\sin\varphi+4}\Leftrightarrow(t-2).\sin\varphi-\sqrt{3}.\cos\varphi=1-2t\quad(1)$.

Phương trình $(1)$ có nghiệm $\Leftrightarrow(t-2)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2\ge(1-2t)^2\Leftrightarrow 3t^2-6\le 0\Leftrightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Xét hàm số $Q=f(t)=2t^3-3t^2+1,\ t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$f'(t)=6t^2-6t$. Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ t=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\end{array}\right.$.

$f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$; $f(0)=1$; $f(1)=0$; $f\left(\sqrt{2}\right)=-5+4\sqrt{2}$.

$\Rightarrow\begin{cases}M=\max Q=\max\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}f(t)=f(0)=1\\ m=\min Q=\min\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}f(t)=f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}\end{cases}$.

Vậy $M+m=-4-4\sqrt{2}$.

**Câu 9.** Cho $x$, $y$ là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$ là:

**A.** $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{114}{11}$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo giả thiết, ta có $(x-3)^2+(y-1)^2=5\Leftrightarrow x^2+y^2=6x+2y-5$.

Đặt $t=x+2y+1$, ta có $|t-6|=|(x-3)+2(y-1)|\le\sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]}$

$\Leftrightarrow|t-6|\le 5$ hay $t\in[1;11]$.

Mặt khác, $t^2=(x+2y+1)^2\Leftrightarrow t^2=\left(x^2+y^2\right)+3y^2+4xy+2x+4y+1$

$\Leftrightarrow t^2=(6x+2y-5)+3y^2+4xy+2x+4y+1\Leftrightarrow t^2=\left(3y^2+4xy+7x+4y-1\right)+(x+2y+1)-4$.

Suy ra $3y^2+4xy+7x+4y-1=t^2-t+4$.

Khi đó $P=\dfrac{t^2-t+4}{t}=t+\dfrac{4}{t}-1\ge 2\sqrt{t.\dfrac{4}{t}}-1=3$, với mọi $t\in[1;11]$.

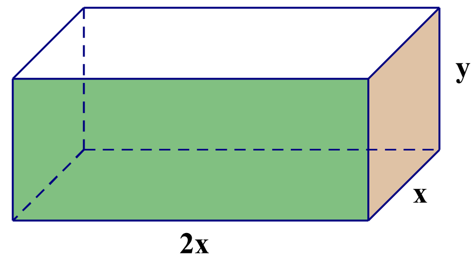
Vậy $\min P=3$ khi $t=2$. Suy ra $x=1$, $y=0$ hoặc $x=\dfrac{17}{5}$, $y=-\dfrac{6}{5}$.

**Câu 10.** **(Nguyễn Khuyến 18-19)** Ông A dự định sử dụng hết $6{,}5\,\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng( các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu ( kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

**A.** $2{,}26\,\text{m}^3$. **B.** $1{,}01\,\text{m}^3$. **C.** $1{,}33\,\text{m}^3$. **D.** $1{,}50\,\text{m}^3$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi chiều rộng của bể cá là $x(\mathrm{m})$, chiều cao là $y(\mathrm{m})(x, y>0)$, khi đó chiều dài bể cá là $2x(\mathrm{m})$.
Diên tích kính sử dụng là $S=2x^2+2xy+4xy\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Theo bài ra ta có: $2x^2+2xy+4xy=6,5 \Rightarrow y=\dfrac{6.5-2x^2}{6x}=\dfrac{13-4x^2}{12x}$.

Thể tích bể cá là $V(x)=2x^2.\dfrac{13-4x^2}{12x}=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Ta xét hàm số $V(x)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}$ với $x \in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Suy ra $V'(x)=\dfrac{13-12x^2}{6} \Rightarrow V'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Ta có $V'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$ hàm số $V(x)$ chỉ có một điểm cực đại nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Thể tích của bể cá có giá trị lớn nhất là $\max\limits_{\left(0;\frac{\sqrt{13}}{2}\right)} V(x)=V\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)=\dfrac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50\ \mathrm{m}^3$.

**Cách 2:** Xử lý tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy.

Theo cách 1, ta tính được $V(x)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}$ với $x \in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ta có $V(x)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}=\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)}{8}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $8x^2(13-4x^2)(13-4x^2) \leq\left(\dfrac{8x^2+13-4x^2+13-4x^2}{3}\right)^3=\dfrac{26^3}{27}$.

Suy ra $V(x) \leq \dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{26^3}{8.27}}=\dfrac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50$ ( kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $8x^2=13-4x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{13}{12}}=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50\ m^3$.

**Câu 11.** Biết rằng các số thực $a$, $b$ thay đổi sao cho hàm số $f(x)=-x^3+(x+a)^3+(x+b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2-4a-4b+2$.

**A.** $-2$. **B.** $2$. **C.** $-4$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=-3x^2+3(x+a)^2+3(x+b)^2=3x^2+6(a+b)x+3a^2+3b^2$.

Do hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm trên $(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow x^2+2(a+b)x+a^2+b^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0 \Leftrightarrow ab\le 0$ (*).

**Cách 1:** Ta có $P=a^2+b^2-2a-2b+4=(a+b)^2-4(a+b)+4-2-2ab$

Hay $P=(a+b-2)^2-2ab-2\ge -2$, do $ab\le 0$ theo (*) và $(a+b-2)^2\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a+b-2=0\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$.

Vậy $\min P=-2$.

**Cách 2:** Do $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f'(-2)\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2-4(a+b)+4\ge 0$

$\Rightarrow P=a^2+b^2-4(a+b)+2\ge -2$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$.

Vậy $\min P=-2$.

**Câu 12.** **(THPT Chuyên Lam Sơn - lần 2- NĂM HỌC 2018 – 2019)** Cho $x$, $y$ thỏa mãn $\log_3\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{3x+2y-9}{x+y+10}$ khi $x$, $y$ thay đổi.

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x+y>0$ (do $x^2+y^2+xy+2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}+2>0$).

Đẳng thức đã cho tương đương với

$\log_3\dfrac{9(x+y)}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-9)+y(y-9)+xy+2$ (*).

Đặt $u=x^2+y^2+xy+2>0$, $v=9x+9y>0$, ta có.

$(*)\Leftrightarrow \log_3\dfrac{v}{u}=u-v\Leftrightarrow u+\log_3 u=v+\log_3 v$.

Mà hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên suy ra

$(*)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x^2+y^2+xy-9x-9y+2=0$.

Ta có

$$x^2+y^2+xy-9x-9y+2=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-9\left(x+\frac{y}{2}\right)=-\frac{3}{4}y^2+\frac{9}{2}y-2=-\frac{3}{4}(y-3)^2+\frac{19}{4}.$$

Dẫn đến

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-9\left(x+\frac{y}{2}\right)\le\frac{19}{4}\Rightarrow-\frac{1}{2}\le x+\frac{y}{2}\le\frac{19}{2}\Rightarrow -1\le 2x+y\le 19.$$

Suy ra

$P=\dfrac{3x+2y-9}{x+y+10}=\dfrac{x+y+10+2x+y-19}{x+y+10}=1+\dfrac{2x+y-19}{x+y+10}\le 1$.

$P=1\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=19\\ y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=3\end{cases}$.

Vậy $\max P=1$.

Cách 2:

Từ giả thiết, ta có $x^2+y^2+xy-9x-9y+2=0(*)$

Ta thấy $x=8, y=3$ thỏa mãn $(*)$, đặt $x=a+8, y=b+3$ khi đó:

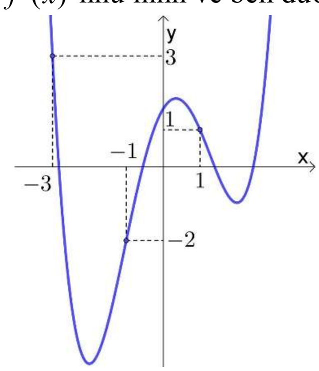
$x^2+y^2+xy-9x-9y+2=0\Leftrightarrow a^2+b^2+ab+10a+5=0\Leftrightarrow 10a+5b=-\left(a^2+ab+b^2\right)$

$\Rightarrow 10a+5b\le 0\Leftrightarrow 2a+b\le 0$

Ta có: $P=\dfrac{3x+2y-9}{x+y+10}=\dfrac{3a+2b+21}{a+b+21}=1+\dfrac{2a+b}{a+b+21}\le 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=8, y=3$. Vậy $P$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1.

**Câu 13.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.




Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-1)$.

**B.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(1)$.

**C.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=\dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$.

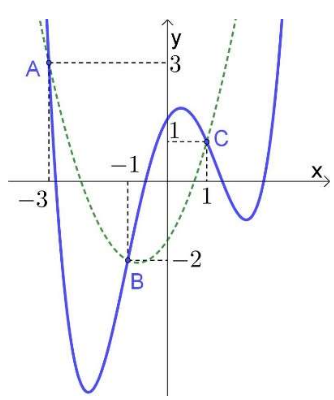
**D.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-3)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}$ và $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

Xét hàm số $h(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$ có đồ thị là một Parabol $(P)$ như hình vẽ bên dưới.



Dựa vào đồ thị trên, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và Parabol $(P)$ có đúng hai điểm chung trong đoạn $[-3;1]$, có hoành độ là $-1$, $1$.

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[-3;1]$ là $-1$, $1$.

Dựa vào đồ thị trên, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3;1]$ như sau

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $g(-1)$ | $\nearrow$ | |

Vậy $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

**Câu 14.** **(TRƯỜNG THPT KINH MÔN)** Xét đồ thị $(C)$ của hàm số $y = x^3 + 3ax + b$ với $a, b$ là các số thực. Gọi $M, N$ là hai điểm phân biệt thuộc $(C)$ sao cho tiếp tuyến với $(C)$ tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng $MN$ bằng 1. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $S = b^2 - 3a^2$ bằng

**A.** $0$. **B.** $-3$. **C.** $-1$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$y' = 3x^2 + 3a$, gọi tọa độ $M(m; m^3 + 3am + b), N(n; n^3 + 3an + b)$ với $(m \neq n)$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại $M$ và $N$ bằng 3 nên ta có:

$$y'(m) = y'(n) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 + 3a = 3 \\ 3n^2 + 3a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm n \\ n^2 = 1 - a \end{cases}$$

Vì $(m \neq n)$ nên $\begin{cases} m = -n \\ m^2 = n^2 = 1 - a \\ a < 1 \end{cases}$. Khi đó $M(-n; -n^3 - 3an + b), \overrightarrow{MN} = (2n; 2n^3 + 6an)$.

Chọn $\overrightarrow{u_{MN}} = (1; 2a + 1)$ là vectơ chỉ phương, $\overrightarrow{n_{MN}} = (-2a - 1; 1)$ là vectơ phép tuyến của đường thẳng $(MN)$.Phương trình đường thẳng $(MN)$:

$$(-2a - 1)(x + n) + (y + n^3 + 3an - b) = 0.$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến $(MN)$: $d(O; MN) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|n(-2a-1) + n^3 + 3an - b|}{\sqrt{(2a+1)^2 + 1}} = 1$

$$\Leftrightarrow |n(a-1) + n^3 - b| = \sqrt{4a^2 + 4a + 2} \Leftrightarrow |n(a-1) + n(1-a) - b| = \sqrt{4a^2 + 4a + 2}$$

$$\Leftrightarrow |b| = \sqrt{4a^2 + 4a + 2} \Leftrightarrow b^2 = 4a^2 + 4a + 2.$$

Ta có $S = b^2 - 3a^2 = a^2 + 4a + 2$ với $a < 1$. Bảng biến thiên của $S = a^2 + 4a + 2$ là:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | -2 | $\nearrow$ | 7 |

Vậy $MinS = -2 \Leftrightarrow a = -2$.

**Câu 15.** Biết $m$ là giá trị để bất phương trình $\begin{cases} 0 < x+y \le 1 \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \ge 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

**A.** $m \in (-2;-1)$. **B.** $m \in \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{3}{4};0\right)$. **D.** $m \in \left(\frac{1}{3};1\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $2xy+m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -2xy \ge -2.\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow m \ge -\frac{1}{2}$.

Nhận xét: Nếu hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 < x+y \le 1 \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \ge 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y), x \ne y$ thì hệ bất phương trình cũng có nghiệm $(y;x)$ do đó, hệ bất phương trình trên chỉ có nghiệm duy nhất khi $x = y$.

+Với $x = y$ ,ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0 < 2x \le 1 \\ 2x+\sqrt{2x^2+m} \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x^2+m} \ge 1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 2x^2+m \ge 1-4x+4x^2 \ (*) \end{cases}$$

Ta có: $2x^2+m \ge 1-4x+4x^2 \Leftrightarrow m \ge 2x^2-4x+1 \ (**)$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2-4x+1$ trên $\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x) = 4x-4 < 0, \forall x \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ |

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $m = -\frac{1}{2}$.

+Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có: $\begin{cases} 0 < x+y \le 1 \\ x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \ge 1 \ (1) \end{cases}$

Ta có: $x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \ge 1 \Rightarrow x+y+\sqrt{2.\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\frac{1}{2}} \ge x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \ge 1$

$\Rightarrow 1 \ge 1$.

Dấu "=" xãy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 < x+y \le 1 \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \ge 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất khi $m = -\frac{1}{2}$.

**Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Tìm tất cả các giá trị $m$ để bất phương trình $y=f\left(\sqrt{x-1}+1\right)\le m$ có nghiệm?

**A.** $m\ge -2$. **B.** $m\ge 4$. **C.** $m=1$. **D.** $m\ge 0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Bất phương trình $f\left(\sqrt{x-1}+1\right)\le m$ xác định khi $x\ge 1$.

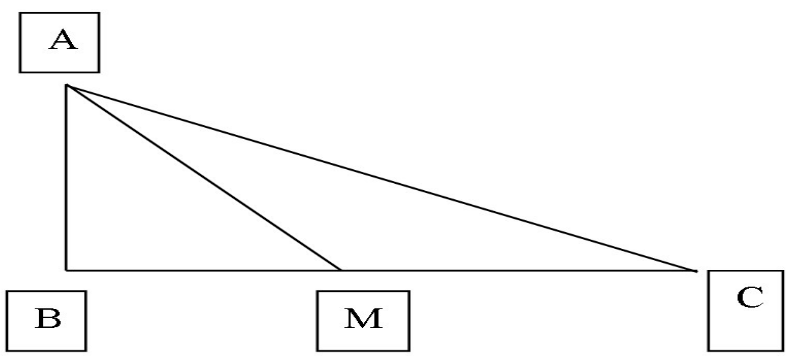
Khi đó, $\sqrt{x-1}+1\ge 1,\forall x\ge 1$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[1;+\infty)} f\left(x\right)=f\left(3\right)=-2$.

Bất phương trình $y=f\left(\sqrt{x-1}+1\right)\le m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge \min\limits_{[1;+\infty)} f\left(x\right)=-2$.

**Câu 17.** **(Thi Thử Cẩm Bình Cẩm Xuyên Hà Tĩnh 2019)** Một chiếc tàu quân sự đậu ở vị trí A cách bờ biển một khoảng AB 5km. Một người lính muốn đột nhập vào căn cứ của đối phương ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người lính đó chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 6 km/h rồi chạy bộ đến C với vận tốc 12km/h(xem hình vẽ dưới đây).Tính độ dài đoạn BM để người đó đến C nhanh nhất?

**A.** $x=4$ **B.** $x=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ **C.** $x=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ **D.** $x=2$




**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi khoảng cách $BM=x$ (Km) $(0\le x\le 7)$

Khi đó: $AM=\sqrt{5^2+x^2}=\sqrt{25+x^2}$ Thời gian đi từ A đến C:

$$f(x)=\frac{\sqrt{25+x^2}}{6}+\frac{7-x}{12}\ ;\ x\in[0;7]$$

bài toán trở thành tìm x để f(x) đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;7]$

$$f'(x)=\frac{x}{6\sqrt{25+x^2}}-\frac{1}{12}\ ;\ x\in[0;7]$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=\sqrt{25+x^2}\ ;\ x\in[0;7]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2=25\ ;\ x\in[0;7]$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên

| x | 0 | | $\frac{5}{\sqrt{3}}$ | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | - | 0 | + | |
| f(x) | | ↘ | | ↗ | |

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số f(x) có cực tiểu duy nhất trên đoạn $[0;7]$ nên giá trị cực tiểu của f(x) là giá trị nhỏ nhất trên $[0;7]$ hay thời gian đi từ A đến C nhanh nhất khi $BM = x = \frac{5}{\sqrt{3}}$

**Câu 18.** Cho các số thực $x$, $y$, $z$ thỏa mãn $x > 2$, $y > 1$, $z > 0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(2x+y-3)}} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$ là

**A.** $P = \frac{1}{2}$. **B.** $P = \frac{1}{4}$. **C.** $P = \frac{1}{6}$. **D.** $P = \frac{1}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $a = x-2$, $b = y-1$, $c = z$.

Ta có: $a$, $b$, $c > 0$ và $P = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2+1 \ge \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \ge \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Mặt khác $(a+1)(b+1)(c+1) \le \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$. Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Đặt $t = a+b+c+1 \Rightarrow t > 1$ khi đó $P \le \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}$, $t > 1$

Xét hàm $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}$, $t > 1$; $f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+2)^4 = 81.t^2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ $(\text{Do } t > 1)$ và $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Bảng biến thiên

| $t$ | 1 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | + | 0 | − | |
| $f(t)$ | 0 | ↗ | $\frac{1}{8}$ | ↘ | 0 |

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{(1;+\infty)} f(t) = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow t = 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a+b+c+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

$\Leftrightarrow x = 3$; $y = 2$; $z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P$ là $\frac{1}{8}$, đạt được khi $(x;y;z) = (3;2;1)$.

**Câu 19.** Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \left|x^3 - 3x + 2m - 1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất thì giá trị của $m$ thuộc

**A.** $(1;2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $[-1;0]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hàm số $y=g(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$, ta có:

$y'=3x^2-3,\ y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số hàm số $y=g(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$

| $x$ | 0 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $y$ | $2m-1$ | $\searrow$ | $2m-3$ | $\nearrow$ | $2m+1$ |

Ta luôn có: $2m-3<2m-1<2m+1\Leftrightarrow g(1)<g(0)<g(2)$

Suy ra: $F=\max\limits_{[0;2]} f(x)=\max\left\{|2m-3|,|2m+1|\right\}$.

Nếu $|2m-3|\le|2m+1|\Leftrightarrow(2m-3)^2\le(2m+1)^2\Leftrightarrow 8\le 16m\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$ thì

$F=|2m+1|\ge\left|2.\frac{1}{2}+1\right|\ge 2$.

Suy ra: $F_{\min}=2\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Nếu $|2m-3|\ge|2m+1|\Leftrightarrow(2m-3)^2\ge(2m+1)^2\Leftrightarrow 8\ge 16m\Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}$ thì

$F=|2m-3|=3-2m\ge 3-2.\frac{1}{2}\ge 2$.

Suy ra: $F_{\min}=2\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Vậy $m\in(0;1)$.

**Câu 20.** **(THPT Chuyên Lam Sơn - lần 2- NĂM HỌC 2018 – 2019)** Cho các số thực $x$, $y$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $3x^2-2xy-y^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+xy+2y^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;4)$. **B.** $(7;10)$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(-2;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

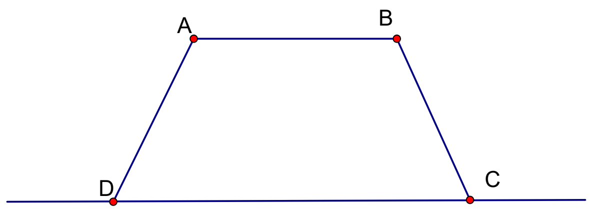
Ta có $P-\frac{5}{4}=P-\frac{1}{4}.5=\left(x^2+xy+2y^2\right)-\frac{1}{4}\left(3x^2-2xy-y^2\right)=\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{2}\right)^2\ge 0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Suy ra $P\ge\frac{5}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{2}=0\\ 3x^2-2xy-y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3y\\ 32y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=\left(\dfrac{-3\sqrt{10}}{8};\dfrac{\sqrt{10}}{8}\right)$ hoặc $(x;y)=\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{8};\dfrac{-\sqrt{10}}{8}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng $\dfrac{5}{4}$.

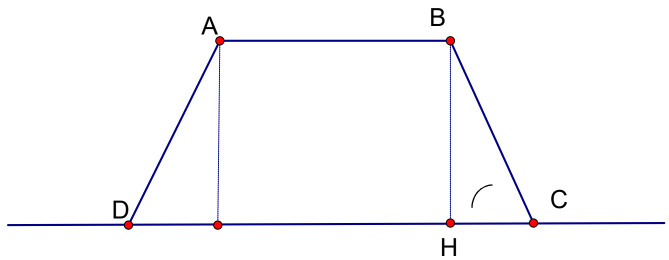
**Câu 21.** **(TRƯỜNG THPT KINH MÔN)** Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng $DC$ không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu $m^2$ ?




**A.** $100\sqrt{3}$. **B.** $106\sqrt{3}$. **C.** $108\sqrt{3}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Kẻ đường cao $BH$, gọi số đo 2 góc ở đáy CD của hình thang là $x, x\in(0°;90°)$.

Diện tích mảnh vườn là:

$$S=\frac{1}{2}BH\left(AB+CD\right)=\frac{1}{2}BC.\sin x\left(2.AB+2BC.\cos x\right)=\frac{1}{2}AB^2\left(2\sin x+\sin 2x\right)$$

Xét hàm số $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ với $x\in\left(0^0;90^0\right)$ có $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x+2\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=-1\end{array}\right.$

Do $x\in\left(0^0;90^0\right)$ nên ta nhận $\cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=60^0$. Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $0^0$ | | $60^0$ | | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow$ | |

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\underset{(0^0;90^0)}{Max} f(x) \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được tại $x = 60^0$.

$\Rightarrow MaxS = 108\sqrt{3}\left(m^2\right)$ khi góc ở đáy $CD$ của hình thang bằng $60^0$ $\left(\widehat{C} = \widehat{D} = 60^0\right)$.

**Câu 22.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Tìm số thực $m$ lớn nhất để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ $m\left(|\sin x| + |\cos x| + 1\right) \le |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x| - 2018$.

**A.** $-\dfrac{2017}{2}$. **B.** $-2017$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-2018$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t = |\sin x| + |\cos x| \Rightarrow t^2 = 1 + |\sin 2x| \le 2 \Rightarrow 1 \le t \le \sqrt{2}$

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành:

$m(t+1) \le t^2 + t - 2019 \Leftrightarrow m \le \dfrac{t^2 + t - 2019}{t+1} = f(t)$ với mọi $t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2 + 2t + 2020}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$.

Vậy $m \le \dfrac{t^2 + t - 2019}{t+1} = f(t)$ với mọi $t \in \left[1;\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow m \le \underset{t \in \left[1;\sqrt{2}\right]}{\min} f(t) = -\dfrac{2017}{2} = f(1)$.

**Câu 23.** Số giá trị nguyên của tham số $m$ nằm trong khoảng $(0;2020)$ để phương trình $\left||x-1| - |2019 - x|\right| = 2020 - m$ có nghiệm là

**A.** $2019$. **B.** $2018$. **C.** $2020$. **D.** $2021$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f(x) = \left||x-1| - |2019 - x|\right| = \begin{cases} 2018, x \notin [1;2019] \\ |2x - 2020|, x \in [1;2019] \end{cases}$.

Vì hàm số $h(x) = 2x - 2020$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2019]$ nên ta có

$$\underset{[1;2019]}{\max} h(x) = \max\{h(1), h(2019)\} = 2018, \underset{[1;2019]}{\min} h(x) = \min\{h(1), h(2019)\} = -2018$$

Suy ra

$$\underset{[1;2019]}{\min} f(x) = 0 \text{ và } \underset{[1;2019]}{\max} f(x) = 2018.$$

Do đó, ta có

$$\underset{\mathbb{R}}{\min} f(x) = 0 \text{ và } \underset{\mathbb{R}}{\max} f(x) = 2018.$$

Vì vậy, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$0 \le 2020 - m \le 2018 \Leftrightarrow 2 \le m \le 2020.$$

Suy ra có 2018 giá trị nguyên của $m$ nằm trong khoảng $(0;2020)$.

**Câu 24.** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của tham số $m$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-mx+2m}{x-2}\right|$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của $S$.

**A.** $-\dfrac{8}{3}$. **B.** $5$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2-mx+2m}{x-2}$,

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$ và $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x}{\left(x-2\right)^2}$.

Xét $f'\left(x\right)=0\Rightarrow\ x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$:

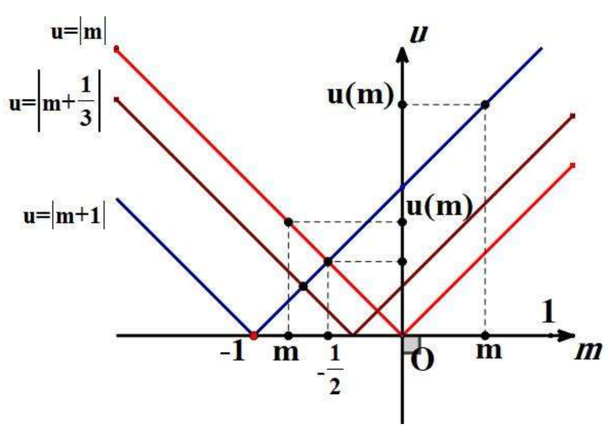
| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $f(-1)$ | $\nearrow$ | $f(0)$ | $\searrow$ | $f(1)$ |

Ta có: $f\left(-1\right)=-m-\dfrac{1}{3}$ ; $f\left(0\right)=-m$ ; $f\left(1\right)=-m-1$.

Suy ra: $\max\limits_{[-1;1]} g\left(x\right)=\max\left\{\left|f\left(-1\right)\right|;\left|f\left(0\right)\right|;\left|f\left(1\right)\right|\right\}$.

Với $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|=\left|\dfrac{x^2-mx+2m}{x-2}\right|$. Ta có $\max\limits_{[-1;1]} g\left(x\right)=\max\left\{\left|f\left(-1\right)\right|;\left|f\left(0\right)\right|;\left|f\left(1\right)\right|\right\}$.

Dựa vào đồ thị các hàm số $u=\left|m\right|;u=\left|m+1\right|;u=\left|m+\dfrac{1}{3}\right|$.




Xét với $m\ge\dfrac{-1}{2}$. Ta có $\max\limits_{[-1;1]} g\left(x\right)=\left|f\left(1\right)\right|=m+1=3\Rightarrow m=2$.

Xét với $m<\dfrac{-1}{2}$ Ta có $\max\limits_{[-1;1]} g\left(x\right)=\left|f\left(0\right)\right|=-m=3\Rightarrow m=-3$.

Vậy $S=\left\{-3;2\right\}$.

**Câu 25.** Cho các số thực dương $a$, $b$ thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?

**A.** $(-5;-4)$. **B.** $(-6;-5)$. **C.** $(-10;-9)$. **D.** $(-11;-10)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:

$$P=4\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]-9\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2\right]=4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-9\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-12\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+18.$$

Theo giả thiết: $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$. Chia cả 2 vế của đẳng thức cho $ab$, ta được:

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Áp dụng BĐT *Cauchy* cho hai số dương $(a+b)$ và $2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$, ta được:

$$(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{(a+b).2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\ge 2\sqrt{2\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}\ (1).$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ $(t>0)$ thì $(1)$ trở thành: $2t+1\ge 2\sqrt{2(2+t)}$

$\Leftrightarrow (2t+1)^2\ge 8(2+t)\Leftrightarrow 4t^2-4t-15\ge 0\Leftrightarrow t\ge\dfrac{5}{2}$ (vì $t>0$).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{2}\\ (a+b)=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\\ 2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{2}\\ a+b=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{5}{2}ab\\ a+b=3\\ \dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=5\\ a+b=3\\ a.b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}.$$

Khi đó, $P=P(a;b)$ trở thành $f(t)=4t^3-9t^2-12t+18$, $t\in\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

$f'(t)=12t^2-18t-12=6(t-2)(2t+1)>0\ \ \forall t\ge\dfrac{5}{2}$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

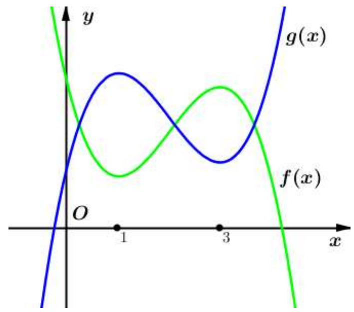
$\Rightarrow \forall t\ge\dfrac{5}{2},\ f(t)\ge f\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

$\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{5}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{23}{4}$.

$\Rightarrow \min P=P(1;2)=P(2;1)=-5,75$.

Vậy $\min P \in (-6;-5)$.

**Câu 26.** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới,




biết rằng $x=1$ và $x=3$ đều là các điểm cực trị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đồng thời $3f(1)=g(3)+1$, $2f(3)=g(1)+4$, $f(-2x+7)=g(2x-3)-1\ (*)$.

Gọi $M$, $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ của hàm số $S(x)=f(x)g(x)-g^2(x)+f(x)-4g(x)+2$. Tính tổng $P=M-2m$.

**A.** $51$. **B.** $19$. **C.** $39$. **D.** $107$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Thay lần lượt $x=2$, $x=3$ vào $(*)$ ta có

$\begin{cases} f(3)=g(1)-1 \\ f(1)=g(3)-1 \end{cases}$, mà $\begin{cases} 3f(1)=g(3)+1 \\ 2f(3)=g(1)+4 \end{cases}$ nên $f(1)=1$, $f(3)=5$, $g(1)=6, g(3)=2$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy $1=f(1)\le f(x)\le f(3)=5$, $2=g(3)\le g(x)\le g(1)=6\ \forall x\in[1;3]$.

Đặt $u=f(x)$, $v=g(x)$ với $1\le u\le 5$, $2\le v\le 6$, xét

$h(u,v)=uv-v^2+u-4v+2=-v^2+(u-4)v+u+2$.

Xem $h(u,v)$ là một hàm số bậc 2 theo biến $v$ ta có

$h'(u,v)=-2v+u-4\le -4+5-4=-3<0\ \ \forall v\in(2;6) \Rightarrow h(u,v)$ nghịch biến trên $[2;6]$.

Suy ra

$h(u,6)\le h(u,v)\le h(u,2)\Rightarrow 7u-58\le h(u,v)\le 3u-10$

$\Rightarrow -51\le h(u,v)\le 5$ (do $1\le u\le 5$).

Từ đó $M=\max\limits_{[1;3]} S(x)=5$, dấu bằng xảy ra khi $x=3$, $m=\min\limits_{[1;3]} S(x)=-51$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

Vậy $P=M-2m=107$.

**Câu 27.** **(HÀ HUY TẬP - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2019)** Cho $x$, $y$ là các số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y\ge \ln(x^2+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

**A.** $P_{\min}=2\sqrt{2}+3$. **B.** $P_{\min}=\sqrt{17}+\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=2+3\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có

$$\ln x+\ln y\ge \ln\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow \ln xy\ge \ln\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow xy\ge x^2+y\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ y\ge \dfrac{x^2}{x-1} \end{cases}.$$

Suy ra

$$P=x+y\ge x+\frac{x^2}{x-1}=\frac{2x^2-x}{x-1}.$$

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-x}{x-1}$ trên $D=\left(1;+\infty\right)$. Ta có

$$y'=\frac{2x^2-4x+1}{\left(x-1\right)^2},\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\ (l) \\ x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

| $x$ | $1$ | | $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3+2\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy $P_{\min}=2\sqrt{2}+3$, đạt được khi $x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 28.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ là $f'\left(x\right)=x\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+3}$. Giả sử $a$, $b$ là hai số thực thay đổi sao cho $a<b\le 1$. Giá trị nhỏ nhất của $f\left(a\right)-f\left(b\right)$ bằng

**A.** $\dfrac{\sqrt{3}-64}{15}$. **B.** $\dfrac{33\sqrt{3}-64}{15}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $-\dfrac{11\sqrt{3}}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f\left(b\right)-f\left(a\right)=\displaystyle\int_a^b f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_a^b x\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{x^2+3}=t\Rightarrow x^2+3=t^2\Rightarrow x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Suy ra: $f\left(b\right)-f\left(a\right)=\displaystyle\int_{\sqrt{a^2+3}}^{\sqrt{b^2+3}}\left(t^2-4\right).t.t\mathrm{d}t$

$$=\int_{\sqrt{a^2+3}}^{\sqrt{b^2+3}}\left(t^4-4t^2\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{a^2+3}}^{\sqrt{b^2+3}}$$

$$=\left[\frac{\left(b^2+3\right)^2\sqrt{b^2+3}}{5}-\frac{4\left(b^2+3\right)\sqrt{b^2+3}}{3}\right]-\left[\frac{\left(a^2+3\right)^2\sqrt{a^2+3}}{5}-\frac{4\left(a^2+3\right)\sqrt{a^2+3}}{3}\right].$$

Như vậy:

$$f(a)-f(b)=\left(\frac{\left(a^2+3\right)^2\sqrt{a^2+3}}{5}-\frac{4\left(a^2+3\right)\sqrt{a^2+3}}{3}\right)-\left(\frac{\left(b^2+3\right)^2\sqrt{b^2+3}}{5}-\frac{4\left(b^2+3\right)\sqrt{b^2+3}}{3}\right).$$

Xét hàm $g(u)=\dfrac{u^5}{5}-\dfrac{4u^3}{3}$.

+ Với $u=\sqrt{a^2+3}$. Vì $a<1$ nên $u\ge\sqrt{3}$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $g(u)$ trên $\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

Ta có: $g'(u)=u^4-4u^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u=-2\\u=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $u$ | $\sqrt{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(u)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(u)$ | $-\frac{11\sqrt{3}}{5}$ | $\searrow$ | $-\frac{64}{15}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra $\min\limits_{\left[\sqrt{3};+\infty\right)} g(u)=g(2)=-\dfrac{64}{15}$. Khi $u=2\Rightarrow\sqrt{a^2+3}=2\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$. Vì $a<1$ nên $a=-1$.

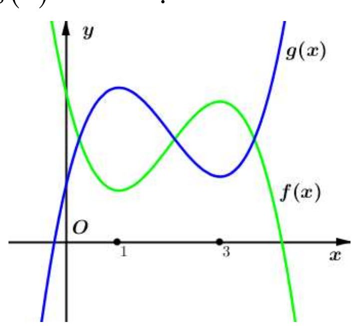
Với $a=-1$ ta có $-1<b\le1$, suy ra $\sqrt{3}\le\sqrt{b^2+3}\le2$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của $g(u)$ trên $\left[\sqrt{3};2\right]$. Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy

$\max\limits_{\left[\sqrt{3};2\right]} g(u)=g\left(\sqrt{3}\right)=-\dfrac{11\sqrt{3}}{5}$. Khi đó $\sqrt{b^2+3}=\sqrt{3}\Leftrightarrow b=0$.

Vậy $f(a)-f(b)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-\dfrac{64}{15}-\left(-\dfrac{11\sqrt{3}}{5}\right)=\dfrac{33\sqrt{3}-64}{15}$ khi $a=-1$; $b=0$.

**Câu 29.** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới,




biết rằng $x=1$ và $x=3$ đều là các điểm cực trị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đồng thời $3f(1)=g(3)+1$, $2f(3)=g(1)+4$, $f(-2x+7)=g(2x-3)-1\ (*)$.

Gọi $M$, $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ của hàm số

$S(x)=f(x)g(x)-g^2(x)+f(x)-4g(x)+2$. Tính tổng $P=M-2m$.

**A.** $39$. **B.** $107$. **C.** $51$. **D.** $19$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Thay lần lượt $x=2$, $x=3$ vào $(*)$ ta có

$\begin{cases} f(3)=g(1)-1 \\ f(1)=g(3)-1 \end{cases}$, mà $\begin{cases} 3f(1)=g(3)+1 \\ 2f(3)=g(1)+4 \end{cases}$ nên $f(1)=1$, $f(3)=5$, $g(1)=6, g(3)=2$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy $1=f(1)\le f(x)\le f(3)=5$, $2=g(3)\le g(x)\le g(1)=6\ \forall x\in[1;3]$.

Đặt $u=f(x)$, $v=g(x)$ với $1\le u\le 5$, $2\le v\le 6$, xét

$h(u,v)=uv-v^2+u-4v+2=-v^2+(u-4)v+u+2$.

Xem $h(u,v)$ là một hàm số bậc 2 theo biến $v$ ta có

$h'(u,v)=-2v+u-4\le -4+5-4=-3<0\ \forall v\in(2;6) \Rightarrow h(u,v)$ nghịch biến trên $[2;6]$.

Suy ra

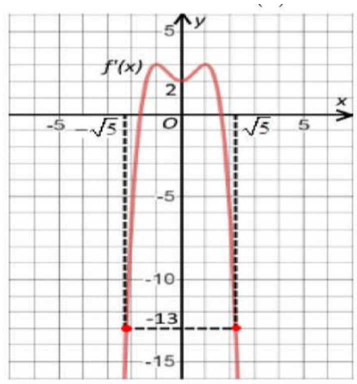
$h(u,6)\le h(u,v)\le h(u,2)\Rightarrow 7u-58\le h(u,v)\le 3u-10$

$\Rightarrow -51\le h(u,v)\le 5$ (do $1\le u\le 5$).

Từ đó $M=\max\limits_{[1;3]} S(x)=5$, dấu bằng xảy ra khi $x=3$, $m=\min\limits_{[1;3]} S(x)=-51$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

Vậy $P=M-2m=107$.

**Câu 30.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ




Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với $m$ là số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x)\le 0\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ là

**A.** $m\le\frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. **B.** $m\ge\frac{2}{3}f(-\sqrt{5})$. **C.** $m\ge\frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. **D.** $m\ge\frac{2}{3}f(0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

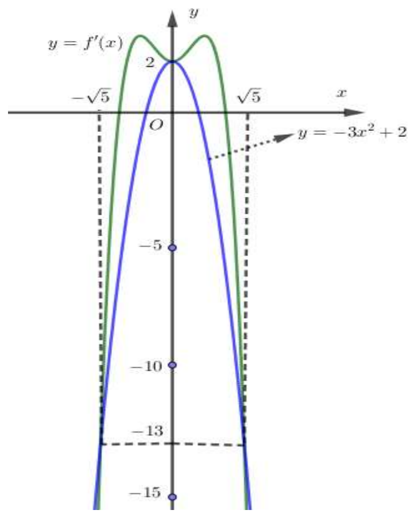
Ta có $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}\le 0,\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

$\Leftrightarrow h(x)=f(x)+x^3-2x-3\sqrt{5}\le\frac{3m}{2},\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

$\Leftrightarrow \max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]} h(x)\le\frac{3m}{2}$.

Ta có: $h'(x) = f'(x) + 3x^2 - 2$.

Vẽ 2 đồ thị $y = f'(x)$ và $y = -3x^2 + 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ:




Nhận xét: $f'(x) \geq -3x^2 + 2,\ \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right] \Rightarrow h'(x) \geq 0,\ \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]} h(x) = h\left(\sqrt{5}\right) = f\left(\sqrt{5}\right) \leq \dfrac{3m}{2} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$.

**------------- HẾT -------------**

**Câu 1.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxy$, cho hai đường tròn $(C_1)$ và $(C_2)$ lần lượt có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ và $(x+1)^2+y^2=1$. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ đi qua tâm của $(C_1)$, đi qua tâm của $(C_2)$ và có các đường tiệm cận tiếp xúc với cả $(C_1)$ và $(C_2)$. Tổng $a+b+c$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $5$. **C.** $8$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đường tròn $(C_1)$ có tâm $I_1(1;2)$ và bán kính $R_1=1$.

Đường tròn $(C_2)$ có tâm $I_2(-1;0)$ và bán kính $R_2=1$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có tiệm cận đứng $d_1: x=-c$, tiệm cận ngang $d_2: y=a$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ đi qua tâm $I_1(1;2)$, đi qua tâm

$$I_2(-1;0)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+b}{1+c}=2\\ \dfrac{-a+b}{-1+c}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2c+2\\ a=b\end{cases}\quad(*).$$

Vì hai đường tròn $(C_1)$ và $(C_2)$ cùng tiếp xúc với hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ nên

$$\begin{cases}d(I_1;d_1)=d(I_2;d_1)=1\\ d(I_1;d_2)=d(I_2;d_2)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|1+c|=|-1+c|=1\\ |2-a|=|-a|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ c=0\end{cases}.$$ Từ $(*)$ suy ra $b=1$.

Vậy $a+b+c=1+1+0=2$.

**Câu 2.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

**A.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $(-\infty;-12)\cup(0;+\infty)$.

**C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2-mx-3m=0\ (*)$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $D=[-1;+\infty)$.

Trên $D$ ta có

$$(*)\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+3}=m.$$

Ta lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$ trên $D$.

$$y'=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6\ (l)\\ x=0\end{array}\right..$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $D=[-1;+\infty)$ khi và chỉ khi $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Ghi chú: ta có thể chọn vài giá trị của $m$ để thử và loại bớt đáp án. Thí dụ chọn $m=0$ thì đồ thị chỉ có 1 tiệm cận đứng $x=0$, loại

**D**. Chọn $m=1$ thì thì đồ thị chỉ có 1 tiệm cận đứng $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, loại B,

**C**.

**Câu 3.** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để đồ thị hàm số $g(x)=\frac{2019}{f(x)-m}$ có hai tiệm cận đứng.

**A.** $m<0$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m>0$. **D.** $m<1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$f(\tan x)=\cos^4 x \Leftrightarrow f(\tan x)=\frac{1}{\left(1+\tan^2 x\right)^2} \Rightarrow f(t)=\frac{1}{(1+t^2)^2}$

Hàm số $g(x)=\frac{2019}{f(x)-m} \Rightarrow g(x)=\frac{2019}{\frac{1}{(1+x^2)^2}-m}$

Hàm số $g(x)$ có hai tiện cận đứng khi và chỉ khi phương trình $\frac{1}{(1+x^2)^2}-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1+x^2)^2=\frac{1}{m}>1 \Leftrightarrow 0<m<1$.

**Câu 4.** **(Thi Thử Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1. 2018-2019)** Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt{4x^2+3x+2}+mx$ có tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của $S$ là

**A.** $-3$. **B.** $3$. **C.** $-2$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

Đặt: $I=\lim\limits_{x\to+\infty} y$; $J=\lim\limits_{x\to-\infty} y$.

$$I=\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-x\right)+\left(2x-\sqrt{4x^2+3x+2}\right)+(m-1)x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2+2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}+x^2}-\frac{3x+2}{2x+\sqrt{4x^2+3x+2}}+(m-1)x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3+\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}+1}-\frac{3+\frac{2}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}+(m-1)x\right].$$

Đặt: $f(x)=\dfrac{3+\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}+1}-\dfrac{3+\frac{2}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{4}\\ I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+(m-1)x\right]\end{cases}.$

$$J=\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-x\right)-\left(2x+\sqrt{4x^2+3x+2}\right)+(m+3)x\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2+2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}+x^2}+\frac{3x+2}{2x-\sqrt{4x^2+3x+2}}+(m+3)x\right].$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3+\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}+1}+\frac{3+\frac{2}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}+(m+3)x\right].$$

Đặt: $g(x)=\dfrac{3+\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}+1}+\dfrac{3+\frac{2}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{7}{4}\\ J=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)+(m+3)x\right]\end{cases}.$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi hoặc $I$ hoặc $J$ có giới hạn hữu hạn.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}m-1=0\\ m+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-3\end{array}\right.\Rightarrow S=\{-3;1\}.$

Tổng các phần tử của $S$ là $-2$.

**------------- HẾT -------------**

**Câu 1.** Cho phương trình $3\sqrt{\tan x+1}\left(\sin x+2\cos x\right)=m\left(\sin x+3\cos x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[0;2019\right]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

**A.** 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình $3\sqrt{\tan x+1}\left(\sin x+2\cos x\right)=m\left(\sin x+3\cos x\right)$ $(1)$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x,\ \cos x,\ \tan x>0$ nên chia cả hai vế của $(1)$ cho $\cos x$, ta được:

$3\sqrt{\tan x+1}\left(\tan x+2\right)=m\left(\tan x+3\right)$ $(2)$.

Đặt $t=\sqrt{\tan x+1}$ $(t>1)$ thì $(2)$ trở thành: $3t\left(t^2+1\right)=m\left(t^2+2\right)\Leftrightarrow \frac{3t^3+3t}{t^2+2}=m$ $(3)$

Theo đề bài, $(1)$ có đúng một nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow(3)$ có đúng một nghiệm $t>1$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{3t^3+3t}{t^2+2}$, $t\in(1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{3t^4+15t^2+6}{\left(t^2+2\right)^2}>0$ $\forall t>1$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | |
| $f(t)$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Theo bảng biến thiên, $(3)$ có đúng một nghiệm $t>1$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại đúng một điểm có hoành độ lớn hơn 1

$\Leftrightarrow m>2$, mà $m$ là số nguyên thuộc đoạn $[0;2019]$.

Vậy có 2017 giá trị nguyên của $m$ thỏa đề.

**Câu 2.** Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f^2\left(|x|\right)-(m-6)f\left(|x|\right)-m+5=0$ có $6$ nghiệm thực phân biệt ?

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(\|x\|)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Đặt $t=f\left(|x|\right)\geq -1(*)$

Nhận xét:

+ với $t_0<-1\xrightarrow{(*)}x\in\varnothing$ + với $t_0=-1;t_0>3\xrightarrow{(*)}$ 2 nghiệm

+ với $t_0=3\xrightarrow{(*)}$ 3 nghiệm+ với $t_0\in(-1;3)\xrightarrow{(*)}$ 4 nghiệm

Phương trình trở thành $t^2-(m-6)t-m+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=m-5\end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1<m-5<3\Leftrightarrow 4<m<8\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{5;6;7\}$

**Câu 3.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$ có hai điểm phân biệt đối xứng qua gốc tọa độ là:

**A.** $(-1;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

**Lời giải:**

**Chọn D**

Gọi $M(x_0;y_0),\ N(-x_0;-y_0)$ thuộc đồ thị hàm số.

Ta có:

$y_0=x_0^3-3mx_0^2+3(m^2-1)x_0+1-m^2\quad(1)$

$-y_0=-x_0^3-3mx_0^2-3(m^2-1)x_0+1-m^2\quad(2)$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có: $-6mx_0^2+2-2m^2=0\quad(*)$.

***Điều kiện cần***: Đồ thị hàm số tồn tại M, N thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Do vậy ta có :

$\dfrac{m^2-1}{-3m}>0\Leftrightarrow\dfrac{m^2-1}{m}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\0<m<1\end{array}\right.$.

***Điều kiện đủ***: Với m thỏa mãn điều kiện trên suy ra phương trình (*) có hai nghiệm $x_1=\sqrt{\dfrac{1-m^2}{3m}};x_2=-\sqrt{\dfrac{1-m^2}{3m}}$

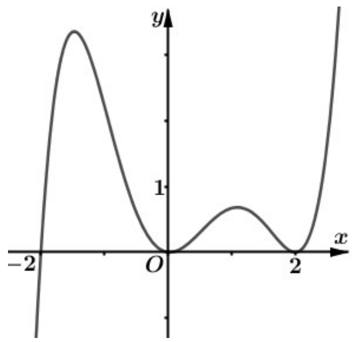
$\Rightarrow y_1=\left(\dfrac{1-m^2}{3m}\right)\sqrt{\dfrac{1-m^2}{3m}}+3(m^2-1)\sqrt{\dfrac{1-m^2}{3m}}$.

$y_2=-\left(\dfrac{1-m^2}{3m}\right)\sqrt{\dfrac{1-m^2}{3m}}-3(m^2-1)\sqrt{\dfrac{1-m^2}{3m}}$

Vậy $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)$.

Chọn đáp án A.

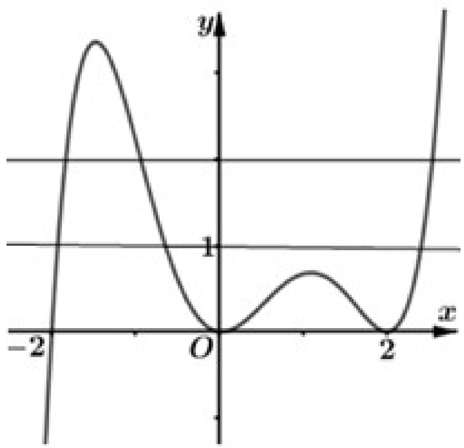
**Câu 4.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]$. Hỏi phương trình $g'\left(x\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?




**A.** 12. **B.** 8. **C.** 14. **D.** 10.

**Lờigiải**

**Chọn A**




$g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]\Rightarrow g'(x)=f'(x).f'\left[f\left(x\right)\right]$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x).f'\left[f\left(x\right)\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f'\left[f\left(x\right)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in\left(-2;-1\right)\\ x=0\\ x=x_2\in\left(1;2\right)\\ x=2\\ f\left(x\right)=x_1\in\left(-2;-1\right)\Leftrightarrow x=x_3<-2\\ f(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-2;0;2\right\}\\ f(x)=x_2\in\left(1;2\right)\Leftrightarrow x\in\left\{x_4;x_5;x_6\right\},x_3<x_4<x_5<0<2<x_6\\ f(x)=2\Leftrightarrow x\in\left\{x_7;x_8;x_9\right\},x_4<x_7<x_8<x_5<x_6<x_9\end{array}\right..$$

Kết luận phương trình $g'\left(x\right)=0$ có 12 nghiệm phân biệt.

**Câu 5.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | | + | 0 | - | 0 | + | | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Có bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm thực?

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=2\sin x+1$ suy ra $t\in\left[-1;3\right]$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow f\left(t\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm thuộc $\left[-1;3\right]$.

$\Leftrightarrow \underset{[-1;3]}{Min}\, f\left(t\right)\le f\left(m\right)\le \underset{[-1;3]}{Max}\, f\left(t\right)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-2\le f\left(m\right)\le 2\Leftrightarrow -1\le m\le 3$.

Suy ra có 5 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 6.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$ và có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-6$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-3$ |

Tổng các giá trị $m\in\mathbb{Z}$ sao cho phương trình $f\left(x-1\right)=\dfrac{m}{x^2-6x+12}$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[2;4\right]$ bằng

**A.** $-75$. **B.** $-72$. **C.** $-294$. **D.** $-297$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $m=\left(x^2-6x+12\right).f\left(x-1\right),\ \forall x\in\left[2;4\right]$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=\left(x^2-6x+12\right).f\left(x-1\right),\ \forall x\in\left[2;4\right]$.

Ta có $g'\left(x\right)=\left(2x-6\right).f\left(x-1\right)+\left(x^2-6x+12\right).f'\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow x=3\in\left[2;4\right]$.

Bởi vì

$$\bullet\ 2\le x<3\Rightarrow\begin{cases}2x-6<0\\ f\left(x-1\right)<0\\ x^2-6x+12>0\\ f'\left(x-1\right)>0\end{cases}\Rightarrow g'\left(x\right)>0.$$

$$\bullet\ 3<x\le 4\Rightarrow\begin{cases}2x-6>0\\ f\left(x-1\right)<0\\ x^2-6x+12>0\\ f'\left(x-1\right)<0\end{cases}\Rightarrow g'\left(x\right)<0.$$

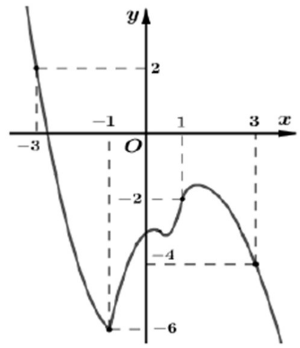
Bảng biến thiên

| $x$ | $2$ | | $3$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $-24$ | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | $-12$ |

Dựa vào BBT, suy ra $-12 \le m < -3$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-12; -11; ...; -4\} \Rightarrow S = -72$.

**Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right) = m-3$ có nghiệm?




**A.** $6$. **B.** $5$. **C.** $9$. **D.** $17$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $6x - 9x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \dfrac{2}{3}$.

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x-9x^2}, x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right]$.

Ta có: $t' = -4.\dfrac{6-18x}{2\sqrt{6x-9x^2}} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3} \in \left(0; \dfrac{2}{3}\right)$.

Bảng biến thiên cho $t = 3 - 4\sqrt{6x-9x^2}$ .Vì $x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right] \Rightarrow t \in [-1; 3]$

Phương trình trở thành: $2f(t) = m - 3 \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{m-3}{2}, t \in [-1; 3]. (*)$

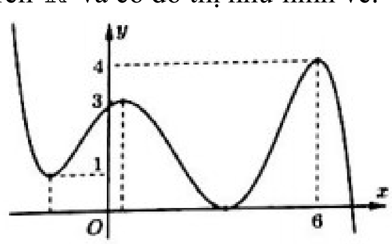
Phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right) = m-3$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t) = \dfrac{m-3}{2}$ có nghiệm $t \in [-1; 3]$

$\Leftrightarrow -6 \le \dfrac{m-3}{2} \le -2 + a \Leftrightarrow -12 \le m - 3 \le -4 + 2a \Leftrightarrow -9 \le m \le -1 + 2a$, với

$\max\limits_{[-1;3]} f(t) = a + 2, a \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-9; -8; -7; ..; -1\} \Rightarrow$ có 9 giá trị $m$ nguyên thỏa ycbt.

**Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số $m$ để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3$ có ba nghiệm phân biệt là

**A.** $m=\pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $m=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}}=f^2(x)+3\Leftrightarrow 4m^3+m=\left(f^2(x)+3\right)\sqrt{2f^2(x)+5}$

$\Leftrightarrow (2m)^3+2m=\left(2f^2(x)+5\right)\sqrt{2f^2(x)+5}+\sqrt{2f^2(x)+5}$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(2m)=f\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right)\Leftrightarrow 2m=\sqrt{2f^2(x)+5}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ f^2(x)=\dfrac{4m^2-5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ f(x)=\pm\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}\end{cases}$

Với $f(x)=-\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ từ đồ thị ta thấy chỉ có 1 nghiệm.

Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình

$f(x)=\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ phải có hai nghiệm $\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}=4\Leftrightarrow m=\dfrac{\sqrt{37}}{2},(m>0)$.

**Câu 9.** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị $(C)$ và điểm $A(0;a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $a$ trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ điểm $A$ kẻ được hai tiếp tuyến đến $(C)$ sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

**A.** $2019$. **B.** $2017$. **C.** $2020$. **D.** $2018$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi tiếp điểm là $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ là:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}$ (d).

(d) qua $A(0;a)$ $\Rightarrow\dfrac{3x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}=a\Leftrightarrow(a-1)x_0^2-2(a+2)x_0+a+2=0,(x_0\neq1)$ (1)

Từ $A$ kẻ được 2 tiếp tuyến đến $(C)$ $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ có 2 nghiệm $x_0$ phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(a+2)^2-(a-1)(a+2)>0\\ a-1-2(a+2)+a+2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow a>-2$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,x_2$.

Hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

$\Leftrightarrow y_1.y_2<0\Leftrightarrow\dfrac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-1)}<0\Leftrightarrow\dfrac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a+2}{a-1}+2\frac{2(a+2)}{a-1}+4}{\frac{a+2}{a-1}-\frac{2(a+2)}{a-1}+1}<0 \Leftrightarrow \frac{9a+6}{-3}<0 \Leftrightarrow 3a+2>0 \Leftrightarrow a>-\frac{2}{3}.$$

Vậy $a>-\frac{2}{3}$. Mà $a$ nguyên và $a\in[-2018;2018] \Rightarrow a\in\{0;1;2;...;2018\}$. Vậy có $2019$ giá trị nguyên của $a$ thỏa mãn.

**Câu 10.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]** Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ $(C_m)$. Tất cả các giá trị của tham số $m$ để đường thẳng $(d): y=x+4$ cắt $(C_m)$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, $B$, $C$ sao cho tam giác $KBC$ có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

**A.** $m=\frac{\pm 1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\frac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m=\frac{1-\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\frac{1+\sqrt{137}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và $(d)$ là:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \quad (1)$$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0$

$\Leftrightarrow x.\left[x^2+2mx+(m+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \\ x^2+2mx+m+2=0 \quad (2) \end{array}\right.$.

$(d)$ cắt $(C_m)$ tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 0^2+2m.0+m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ \begin{cases} m<-1 \\ m\neq -2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Khi đó, $(2)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$ tương ứng cũng là hoành độ của $B$ và $C$.

$\Rightarrow B(x_1;x_1+4)$ và $C(x_2;x_2+4)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{KB}=(x_1-1;x_2+1)$ và $\overrightarrow{KC}=(x_2-1;x_2+1)$.

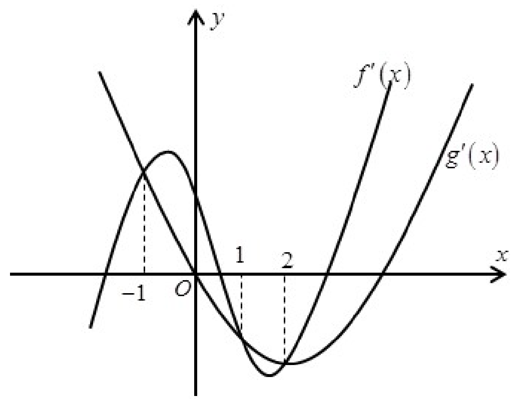
$\Rightarrow S_{\Delta KBC}=\frac{\left|(x_1-1)(x_2+1)-(x_2-1)(x_1+1)\right|}{2}=|x_1-x_2|$.

Theo đề bài: $S_{\Delta KBC}=8\sqrt{2} \Leftrightarrow |x_1-x_2|=8\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=128 \Leftrightarrow S^2-4P=128$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m+2) = 128 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$ (nhận).

Vậy tất cả các giá trị $m$ thỏa đề là $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

**Câu 11.** **(SGD Hưng Yên - 2019)** Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(n, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $f'(x), g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây




Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

+) Từ giả thiết $f(0) = g(0)$ suy ra $r = d$ do đó phương trình $f(x) = g(x)$ tương đương với:

$$x\left[mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + (q-c)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + (q-c) = 0 \end{array}\right.$$

+) Từ đồ thị của các hàm số $f'(x), g'(x)$ suy ra $m \neq 0$

$$\text{và } \begin{cases} f'(-1) = g'(-1) \\ f'(1) = g'(1) \\ f'(2) = g'(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 3(n-a) - 2(p-b) + q - c = 0 \\ 4m + 3(n-a) + 2(p-b) + q - c = 0 \\ 32m + 12(n-a) + 4(p-b) + q - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - a = -\dfrac{8}{3}m \\ p - b = -2m \\ q - c = 8m \end{cases}.$$

Từ đó ta có phương trình: $mx^3 - \dfrac{8}{3}mx^2 - 2mx + 8m = 0 \Leftrightarrow x^3 - \dfrac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0$.

Sử dụng máy tính Casio ta được phương trình có 1 nghiệm và nghiệm đó khác $0$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có 2 phần tử.

**Câu 12.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]** Tìm $m$ để phương trình $\left|x^4 - 5x^2 + 4\right| = \log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt:

**A.** Không có giá trị của $m$. **B.** $1 < m < \sqrt[4]{2^9}$.

**C.** $0 < m < \sqrt[4]{2^9}$. **D.** $-\sqrt[4]{2^9} < m < \sqrt[4]{2^9}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

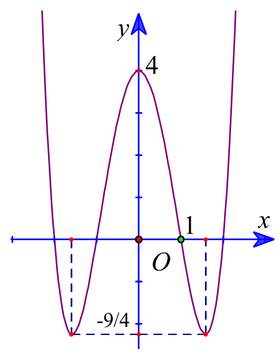
Xét hàm số $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Có $f'(x) = 4x^3 - 10x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{10}/2$ | | $0$ | | $\sqrt{10}/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-9/4$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-9/4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

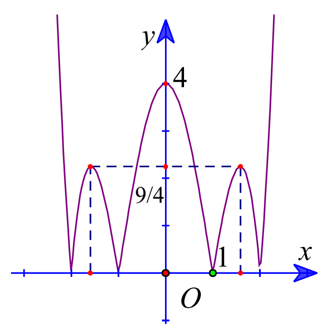
Đồ thị hàm số $y = f(x)$




Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ $(C)$, suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị $(C)$ nằm phía trên $Ox$.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị $(C)$ nằm phía dưới $Ox$ qua $Ox$.




Từ đồ thị suy ra phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 0 < \log_2 m < \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt[4]{2^9}$.

**Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\sqrt{x+m} - \sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}} = \sqrt{x+2m}$ có đúng một nghiệm nhỏ hơn $20$.

**A.** $19$. **B.** $18$. **C.** $9$. **D.** $10$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\sqrt{x+m}-\sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}}=\sqrt{x+2m} \Leftrightarrow \sqrt{x+m}-\sqrt{x+2m}=\sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}}$.

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -m \\ x\ge -2m \\ x+m\ge x+2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ x\ge -2m \end{cases}$.

$\sqrt{x+m}-\sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}}=\sqrt{x+2m} \Leftrightarrow x+m+\dfrac{m^2}{x+m}-2\sqrt{m^2}=x+2m$

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{x+m}=m+2|m| \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{x+m}=m-2m \ (do\, m\le 0)$.

$\Leftrightarrow m=0$ hoặc $x=-2m$

+)Với $m=0$ thì phương trình ban đầu luôn đúng với mọi $x\ge 0$ ( không thỏa yêu cầu bài toán).

+) Với $x=-2m$;

phương trình ban đầu có đúng 1 nghiệm nhỏ hơn $20 \Leftrightarrow -2m<20 \Leftrightarrow m>-10$.

suy ra $m\in(-10;0)$ nên có 9 giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 14.** Cho hàm số $y=2x^3+ax^2+bx+c$ ( $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ ) thỏa mãn $9a+3b+c<-54$ và $a-b+c>2$. Gọi $S$ là số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục $Ox$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $S=2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=3$. **D.** $S=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét:

$f(3)=54+9a+3b+c<0$

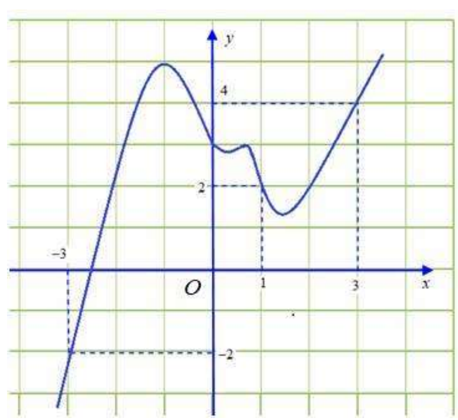
$f(-1)=-2+a-b+c>0$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Nên phương trình $y=2x^3+ax^2+bx+c=0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-\infty;-1);(-1;3);(3;+\infty)$.

Suy ra đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

**Câu 15.** **(TRƯỜNG THPT YÊN KHÁNH A)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây




Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng ?**

**A.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

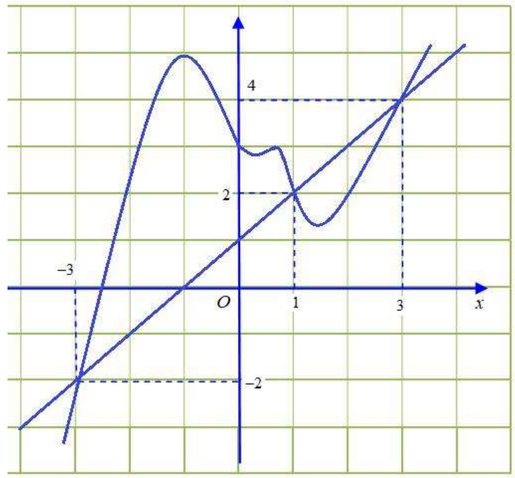
**B.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

**C.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

**D.** Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có $g(1)=f(1)-\dfrac{(1+1)^2}{2}=f(1)-2=4$ và $g'(x)=f'(x)-(x+1)$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$

và $y=x+1$ ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$; $y=x+1$; $x=-3;x=1$ có diện tích

$S_1>4\Leftrightarrow\int\limits_{-3}^{1}\left|f'(x)-(x+1)\right|dx>4\Leftrightarrow\int\limits_{-3}^{1}\left|g'(x)\right|dx>4\Leftrightarrow g(1)-g(-3)>4\Rightarrow g(-3)<g(1)-4=0$.

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$; $y=x+1$; $x=1;x=3$ có diện tích $S_2<4$

$\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{3}\left|f'(x)-(x+1)\right|dx<4\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{3}\left|g'(x)\right|dx<4\Leftrightarrow-g(3)+g(1)<4\Rightarrow g(3)>g(1)-4=0$.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm $y=g(x)$ trên $[-3;3]$

| $x$ | $-3$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $g(x)$ | $g(-3)<0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $g(3)>0$ |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

**Câu 16.** Gọi $m$ là giá trị để đồ thị $(C_m)$ của hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với $(C_m)$ tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có:

**A.** $m\in(-1;0)$. **B.** $m\in(1;2)$. **C.** $m\in(-2;-1)$. **D.** $m\in(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt là phương trình $x^2+2mx+2m^2-1=0\ (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $1$. Điều đó tương đương

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ 1^2+2m.1+2m^2-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-\left(2m^2-1\right)>0\\ 2m^2+2m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m^2>0\\ m\neq 0\\ m\neq -2\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-1;1)\setminus\{0\}.$$

Với điều kiện trên, gọi $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$. Ta được:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\ x_1.x_2=2m^2-1\end{cases}.$$

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-2x-2m^2-2m+1}{(x-1)^2}=1-\dfrac{2m^2+2m}{(x-1)^2}$. Theo yêu cầu bài toán thì

$$y'(x_1)y'(x_2)=-1\Leftrightarrow\left(1-\frac{2m^2+2m}{(x_1-1)^2}\right)\left(1-\frac{2m^2+2m}{(x_2-1)^2}\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow 1-\left(2m^2+2m\right)\left(\frac{1}{(x_1-1)^2}+\frac{1}{(x_2-1)^2}\right)+\frac{2m^2+2m}{(x_1-1)^2}\frac{2m^2+2m}{(x_2-1)^2}=-1$$

$$\Leftrightarrow 1-\left(2m^2+2m\right)\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)+2}{\left(x_1.x_2-(x_1+x_2)+1\right)^2}+\left(\frac{2m^2+2m}{x_1.x_2-(x_1+x_2)+1}\right)^2=-1$$

$$\Leftrightarrow 1-\left(2m^2+2m\right)\frac{4m^2-2\left(2m^2-1\right)-(-2m)+2}{\left(2m^2-1+2m+1\right)^2}+\left(\frac{2m^2+2m}{2m^2-1+2m+1}\right)^2=-1$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2m+4}{2m^2+2m}+1=-1\Leftrightarrow\frac{2m+4}{2m^2+2m}=3\Leftrightarrow 6m^2+4m-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\\ m=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\end{array}\right..$$

So với điều kiện ta nhận $m=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\in(0;1)$.

**Câu 17.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]** Tìm $m$ để phương trình $\left|x^4-5x^2+4\right|=\log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt:

**A.** $0<m<\sqrt[4]{2^9}$.

**B.** $-\sqrt[4]{2^9}<m<\sqrt[4]{2^9}$.

**C.** Không có giá trị của *m*.

**D.** $1<m<\sqrt[4]{2^9}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

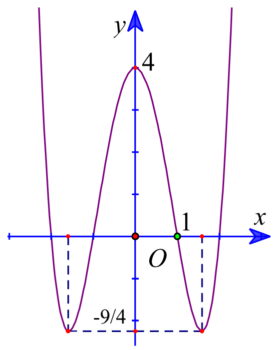
Xét hàm số $f(x)=x^4-5x^2+4$.

Có $f'(x)=4x^3-10x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{10}/2$ | | $0$ | | $\sqrt{10}/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-9/4$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-9/4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

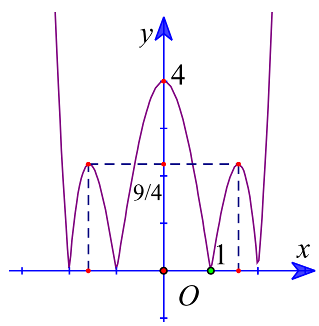
Đồ thị hàm số $y = f(x)$




Từ đồ thị hàm số $y = f(x)\,(C)$, suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị $(C)$ nằm phía trên $Ox$ .

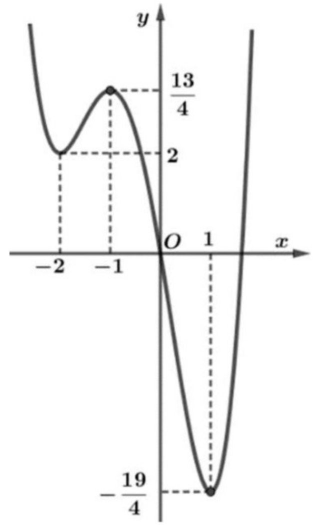
+ Lấy đối xứng phần đồ thị $(C)$ nằm phía dưới $Ox$ qua $Ox$ .




Từ đồ thị suy ra phương trình $\left|x^4 - 5x^2 + 4\right| = \log_2 m$ có 8 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 0 < \log_2 m < \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt[4]{2^9}$ .

**Câu 18.** **(Trường THPT Thăng long Hà Nội)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.




Tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ là

**A.** $\left[-\dfrac{19}{4};\dfrac{13}{4}\right]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $\left[2;\dfrac{13}{4}\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{19}{4};+\infty\right)$.

**Lời giải**

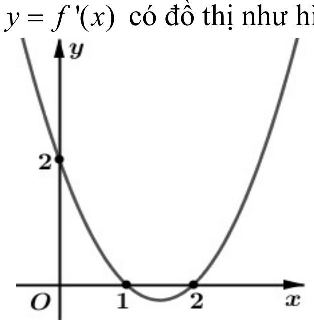
**Chọn B**

Ta có $-1\le \cos x<0,\ \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ nên $\dfrac{1}{\cos x}\le -1,\ \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị ta chỉ cần xét từ $-\infty$ đến $-1$ và phần từ $-1$ đến $+\infty$ của đồ thị được bỏ đi. (Tính theo trục hoành). Khi đó, để phương trình $f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì $m\ge 2$. Do đó chọn

**D.**

**Câu 19.** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Hàm số $y=f\left(2x-3x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

**A.** $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $g'(x)=(2-6x)f'\left(2x-3x^2\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Rightarrow g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-6x>0\\ f'(2x-3x^2)>0\end{cases}\\ \begin{cases}2-6x<0\\ f'(2x-3x^2)<0\end{cases}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}2-6x>0\\ f'(2x-3x^2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}2x-3x^2<1\\ 2x-3x^2>2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}3x^2-2x+1>0\\ 3x^2-2x+2<0\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}3x^2-2x+1>0\forall x\in R\\ 3x^2-2+2<0:\text{vô nghiệm}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{3}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}2-6x<0\\ f'(2x-3x^2)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{3}\\ 1<2x-3x^2<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{3}\\ \begin{cases}3x^2-2x+1<0\\ 3x^2-2x+2>0\end{cases}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{3}\\ \begin{cases}3x^2-2x+1<0:\text{vô nghiệm}\\ 3x^2-2x+2>0,\forall x\in R\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow$ vô nghiệm.

Vậy hàm số $y=f(2x-3x^2)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$.

**Câu 20.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]** Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ $(C_m)$. Tất cả các giá trị của tham số $m$ để đường thẳng $(d): y=x+4$ cắt $(C_m)$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, $B$, $C$ sao cho tam giác $KBC$ có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

**A.** $m=\dfrac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\pm 1+\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1-\sqrt{137}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và $(d)$ là:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \quad (1)$$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0$

$\Leftrightarrow x.\left[x^2+2mx+(m+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4\\ x^2+2mx+m+2=0 \quad (2)\end{array}\right.$.

$(d)$ cắt $(C_m)$ tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 + 2m.0 + m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Khi đó, $(2)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$ tương ứng cũng là hoành độ của $B$ và $C$.

$\Rightarrow B(x_1; x_1 + 4)$ và $C(x_2; x_2 + 4)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{KB} = (x_1 - 1; x_2 + 1)$ và $\overrightarrow{KC} = (x_2 - 1; x_2 + 1)$.

$$\Rightarrow S_{\Delta KBC} = \frac{|(x_1 - 1)(x_2 + 1) - (x_2 - 1)(x_1 + 1)|}{2} = |x_1 - x_2|.$$

Theo đề bài: $S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 128 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 128$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m + 2) = 128 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$ (nhận).

Vậy tất cả các giá trị $m$ thỏa đề là $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

**Câu 21.** **(THPT Chuyên Lam Sơn - lần 2- NĂM HỌC 2018 – 2019)** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4 - 2m^2$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị

**A.** 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là R, là hàm số bậc 4 trùng phương có hệ số của $x^4$ dương

Ta có số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số lần đồ thị hàm số $y = f(x)$ xuyên qua $Ox$. Do vậy, để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị thì xảy ra 2 trường hợp

TH1. Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị và không xuyên qua $Ox$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ y_{CT} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ f\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m < 0 \\ m^2 - 2m^2 + 4 - 2m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -3m^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$m$ là số nguyên $m \in (-10;10)$ nên $m = 1$

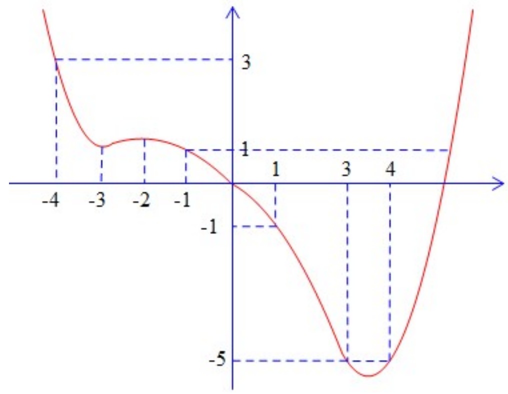
TH2. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị và xuyên qua $Ox$ đúng 2 lần

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ y_{CT} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ c \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m \geq 0 \\ 4 - 2m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -\sqrt{2} \\ m \geq \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\sqrt{2}$$

$m$ là số nguyên $m \in (-10;10)$ nên $m = -9; -8; ...; -2$

Kết luận: Có 9 số $m$ thỏa mãn

**Câu 22.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.




**A.** $22$. **B.** $23$. **C.** $10$. **D.** $13$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $3-4\sqrt{6x-9x^2}=t\Leftrightarrow 6x-9x^2=\dfrac{\left(t-3\right)^2}{16}\left(t\le 3\right)\ \left(1\right)$.

Phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{\left(t-3\right)^2}{16}\le 1\Leftrightarrow -1\le t\le 7$. Kết hợp điều kiện $\Rightarrow -1\le t\le 3$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $2f\left(t\right)=m-3\Leftrightarrow f\left(t\right)=\dfrac{m-3}{2}$ có nghiệm trên đoạn $\left[-1;3\right]$. Từ đồ thị suy ra $-5\le \dfrac{m-3}{2}\le 1\Leftrightarrow -7\le m\le 5$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 23.** Cho hàm số $y=2x^3+ax^2+bx+c$ ( $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ ) thỏa mãn $9a+3b+c<-54$ và $a-b+c>2$. Gọi $S$ là số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục $Ox$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $S=3$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét:

$f(3)=54+9a+3b+c<0$

$f(-1)=-2+a-b+c>0$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Nên phương trình $y=2x^3+ax^2+bx+c=0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $\left(-\infty;-1\right);(-1;3);(3;+\infty)$.

Suy ra đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

**Câu 24.** Cho phương trình $3\sqrt{\tan x+1}\left(\sin x+2\cos x\right)=m\left(\sin x+3\cos x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[0;2019\right]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**A.** 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình $3\sqrt{\tan x+1}\left(\sin x+2\cos x\right)=m\left(\sin x+3\cos x\right)$ $(1)$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x,\ \cos x,\ \tan x>0$ nên chia cả hai vế của $(1)$ cho $\cos x$, ta được:

$3\sqrt{\tan x+1}\left(\tan x+2\right)=m\left(\tan x+3\right)$ $(2)$.

Đặt $t=\sqrt{\tan x+1}$ $(t>1)$ thì $(2)$ trở thành: $3t\left(t^2+1\right)=m\left(t^2+2\right)\Leftrightarrow \dfrac{3t^3+3t}{t^2+2}=m$ $(3)$

Theo đề bài, $(1)$ có đúng một nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow(3)$ có đúng một nghiệm $t>1$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{3t^3+3t}{t^2+2}$, $t\in(1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{3t^4+15t^2+6}{\left(t^2+2\right)^2}>0$ $\forall t>1$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | |
| $f(t)$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Theo bảng biến thiên, $(3)$ có đúng một nghiệm $t>1$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại đúng một điểm có hoành độ lớn hơn 1

$\Leftrightarrow m>2$, mà $m$ là số nguyên thuộc đoạn $[0;2019]$.

Vậy có 2017 giá trị nguyên của $m$ thỏa đề.

**Câu 25.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\sqrt{x+m}-\sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}}=\sqrt{x+2m}$ có đúng một nghiệm nhỏ hơn $20$.

**A.** $9$. **B.** $10$. **C.** $19$. **D.** $18$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\sqrt{x+m}-\sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}}=\sqrt{x+2m}\Leftrightarrow\sqrt{x+m}-\sqrt{x+2m}=\sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}}$.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -m\\ x\ge -2m\\ x+m\ge x+2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 0\\ x\ge -2m\end{cases}$.

$\sqrt{x+m}-\sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}}=\sqrt{x+2m}\Leftrightarrow x+m+\dfrac{m^2}{x+m}-2\sqrt{m^2}=x+2m$

$\Leftrightarrow\dfrac{m^2}{x+m}=m+2|m|\Leftrightarrow\dfrac{m^2}{x+m}=m-2m$ $(do\, m\le 0)$.

$\Leftrightarrow m=0$ hoặc $x=-2m$

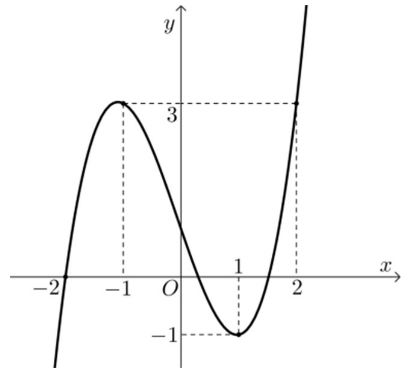
+)Với $m=0$ thì phương trình ban đầu luôn đúng với mọi $x\ge 0$ ( không thỏa yêu cầu bài toán).

+) Với $x=-2m$;

phương trình ban đầu có đúng 1 nghiệm nhỏ hơn $20\Leftrightarrow -2m<20\Leftrightarrow m>-10$.

suy ra $m \in (-10;0)$ nên có 9 giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 26.** **(TRƯỜNG THPT YÊN KHÁNH A)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây:




Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là:

**A.** $(-1;3]$. **B.** $\left(-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $\left[-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Trước hết, xét hàm số $t(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$:

$t'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Cho $t'(x)=0 \Leftrightarrow x=0\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$.

Ta có BBT của $t(x)$ như sau:

| $x$ | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $t(x)$ | $\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ |

$\Rightarrow 1<t(x)\le 2\ \forall x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

Bây giờ, đặt $t=\sqrt{4-x^2}$. Lúc này, phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$

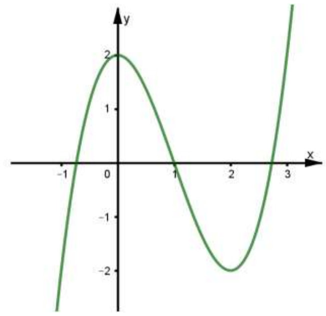
$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t\in(1;2]$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số $f(t)$ có điểm chung trong nửa khoảng $(1;2]$

$\Leftrightarrow -1<m\le 3$.

Vậy $m\in(-1;3]$.

**Câu 27.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $R$ và có đồ thị như hình vẽ




Gọi $m$ là số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=0$. Khẳng định nào sau đây đúng.

**A.** $m=4$ **B.** $m=6$ **C.** $m=5$ **D.** $m=7$

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ đồ thị ta có $f\left(f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1 \\ f(x)=1 \\ f(x)=x_2 \end{array}\right.$ với $-1<x_1<0$ ; $2<x_2<3$

Trường hợp 1: $f(x)=x_1$ có 3 nghiệm phân biệt

Trường hợp 2: $f(x)=1$ có 3 nghiệm phân biệt

Trường hợp 3: $f(x)=x_2$ có 1 nghiệm

Vậy phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có 7 nghiệm hay $m=7$.

**Câu 28.** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f^2\left(|x|\right)-\left(m-6\right)f\left(|x|\right)-m+5=0$ có $6$ nghiệm thực phân biệt ?

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $f\left(x\right)=x^2-4x+3$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(\|x\|)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Đặt $t=f\left(|x|\right)\geq -1 (*)$

Nhận xét:

+ với $t_0<-1 \xrightarrow{(*)} x\in\varnothing$ + với $t_0=-1; t_0>3 \xrightarrow{(*)}$ $2$ nghiệm

+ với $t_0=3 \xrightarrow{(*)}$ $3$ nghiệm+ với $t_0\in\left(-1;3\right) \xrightarrow{(*)}$ $4$ nghiệm

Phương trình trở thành $t^2-(m-6)t-m+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=m-5 \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1<m-5<3 \Leftrightarrow 4<m<8 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{5;6;7\}$

**Câu 29.** Biết rằng phương trình $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,\ (a,b,c,d,e\in R, a\neq 0, b\neq 0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực?

$\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)^2-2\left(6ax^2+3bx+c\right)\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)=0$.

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g(x)=\left(f'(x)\right)^2-f''(x).f(x)$

Đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt bên phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, với $x_i,(i=1,2,3,4)$ là các nghiệm.

Suy ra

$$f'(x)=a[(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)]$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4} \Rightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}=-\left(\left(\frac{1}{x-x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{x-x_2}\right)^2+\left(\frac{1}{x-x_3}\right)^2+\left(\frac{1}{x-x_4}\right)^2\right)$$

Nếu $x=x_i$ với $i=1,2,3,4$ thì $f(x)=0$, $f'(x)\neq 0 \Rightarrow f''(x)f(x)<\left(f'(x)\right)^2$.

Nếu $x\neq x_i\ (\forall i=1,2,3,4)$ thì $\frac{1}{(x-x_i)^2}>0$, $f^2(x)>0$. Suy ra $f''(x).f(x)-\left(f'(x)\right)^2<0$

$\Leftrightarrow f''(x).f(x)<\left(f'(x)\right)^2$. Vậy phương trình $\left(f'(x)\right)^2-f''(x).f(x)=0$ vô nghiệm hay phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm. Do đó, số giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là $0$.

**------------- HẾT -------------**

**Câu 1.** Một người vay ngân hàng $200$ triệu đồng với lãi suất là $0,6\%$ một tháng theo hình thức lãi kép với thỏa thuận: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay thì ông bắt đầu trả nợ và đều đặn cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 9 triệu đồng cho đến khi hết nợ (biết rằng, tháng cuối cùng có thể trả dưới 9 triệu đồng). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

**A.** $24$. **B.** $22$. **C.** $23$. **D.** $25$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Xây dựng công thức: Vay $A$ đồng, lãi $r$/tháng. Hỏi hàng tháng phải trả bao nhiêu để sau $n$ tháng thì hết nợ (trả tiền vào cuối tháng).**

Gọi $a$ là số tiền trả hàng tháng.

Cuối tháng $1$, nợ: $A(1+r)$.

Trả $a$ đồng nên còn nợ: $A(1+r)-a$.

Cuối tháng $2$, nợ: $\left[A(1+r)-a\right](1+r)=A(1+r)^2-a(1+r)$.

Trả $a$ đồng nên còn nợ: $A(1+r)^2-a(1+r)-a$.

Cuối tháng $3$, nợ: $\left[A(1+r)^2-a(1+r)-a\right](1+r)=A(1+r)^3-a(1+r)^2-a(1+r)$.

Trả $a$ đồng nên còn nợ: $A(1+r)^3-a(1+r)^2-a(1+r)-a$.

Cuối tháng $n$, nợ: $(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2}-...-a(1+r)$.

Trả $a$ đồng nên còn nợ: $A(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-a(1+r)^{n-2}-...-a(1+r)-a$

$=A(1+r)^n-a\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+...+(1+r)+1\right]$

$=A(1+r)^n-a\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$.

Để hết nợ sau n tháng thì số tiền a phải trả hàng tháng là: $a=\dfrac{A.r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$

Áp dụng: $9=\dfrac{200.0,6\%.(1+0,6\%)^n}{(1+0,6\%)^n-1}\Rightarrow n\approx 23,92$.

Vậy sau 24 tháng thì người đó trả hết nợ ngân hàng.

**Câu 2.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** So sánh ba số $a=1000^{1001}$, $b=2^{2^{64}}$ và $c=1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}$?

**A.** $c<a<b$. **B.** $b<a<c$. **C.** $c<b<a$. **D.** $a<c<b$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $1^1<1000^{1000}$; $2^2<1000^{1000}$ $...999^{999}<1000^{1000}$

$\Rightarrow c=1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}<1000.1000^{1000}\Leftrightarrow c<a$

Mặt khác: $2^{10}>1000$

$\Rightarrow 2^{64}.\ln 2=\dfrac{2^4}{10}.\left(2^{10}\right)^6.\ln 2^{10}>1000^6.\ln 1000>1001.\ln 1000\Rightarrow 2^{2^{64}}>1000^{1001}\Leftrightarrow a<b$

Vậy $c<a<b$.

**Câu 3.** Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó.Hỏi sau 1 năm số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam nhận được là bao nhiêu? ( Giả sử lãi suất không thay đổi).

**A.** $209,25$ triệu đồng. **B.** $208,25$ triệu đồng.

**C.** $210,45$ triệu đồng. **D.** $218,64$ triệu đồng.

**Lời giải**

**Chọn D**

• Số tiền anh Nam nhận được sau 6 tháng (tức 2 quý) là:

$T_1 = 100\left(1+3^0/_0\right)^2 = 106,09$ triệu đồng.

• Số tiền anh Nam nhận được sau một năm (tức 2 quý còn lại của năm) là:

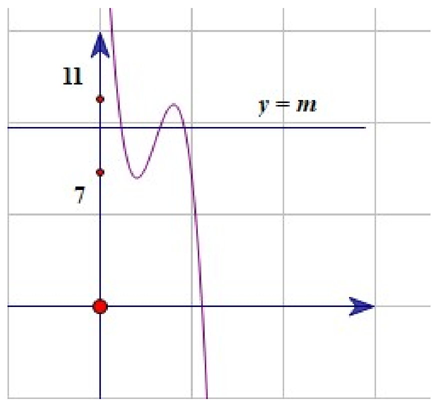
$T_2 = (106,09+100)\left(1+3^0/_0\right)^2 \approx 218,64$ triệu đồng.

**Câu 4.** Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3} = 3^x+1$ có 3 nghiệm phân biệt là

**A.** $45$. **B.** $34$. **C.** $27$. **D.** $38$.

**Lời giải**

**Chọn C**




$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3} = 3^x+1$

$\Leftrightarrow 3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left[(x-3)^3+27+m-3x\right].3^{x-3} = 3^x+1$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-3)^3 + m - 3x + 27 = 3^3 + 3^{3-x}\ (1)$

$a = 3-x;\ b = \sqrt[3]{m-3x}$

$(1) \Leftrightarrow 3^b + 27 + b^3 - a^3 = 27. + 3^a \Leftrightarrow 3^b + b^3 = 3^a + a^3$

Xét $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t.\ln 3 + 3t^2 \ge 0 \forall t \in R$

$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 3-x = \sqrt[3]{m-3x}$

$\Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27$

$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 18x - 24$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

Dựa vào đồ thị: $7 < m < 11 \Rightarrow m \in \{8;9;10\}$.

**Câu 5.** Cho phương trình: $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0$. Tập các giá trị để bất phương trình có ba nghiệm phân biệt có dạng $(a;b)$. Tổng $a+2b$ bằng:

**A.** 2. **B.** $-4$. **C.** 0. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m} + x^3 + x^2 - 2x + m = 2^{x^2+x} + x^2 + x\,(*)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $(*)\Leftrightarrow f\left(x^3+x^2-2x+m\right)=f\left(x^2+x\right)\Leftrightarrow x^3+x^2-2x+m=x^2+x$

$\Leftrightarrow x^3-3x+m=0\Leftrightarrow m=-x^3+3x(**)$.

Xét hàm số $g(x)=-x^3+3x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=-3x^2+3$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<m<2\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}\Rightarrow a+2b=2$.

**Câu 6.** **(SGD Nam Định_Lần 1_2018-2019)**Tìm tham số $m$ để tồn tại **duy nhất** cặp số $(x;y)$thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2019}(x+y)\le 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1$

**A.** $m=2$. **B.** $m=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hệ bất phương trình: $\begin{cases}\log_{2019}(x+y)\le 0 & (1)\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1 & (2)\end{cases}$

$(x;y)$là nghiệm hệ bất phương trình thì $(y;x)$cũng là nghiệm của hệ bất phương trình. Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow x=y$.

Khi đó: (1)$\Leftrightarrow 0<2x\le 1\ \Leftrightarrow 0<x\le\dfrac{1}{2}$.

Với $0<x\le\dfrac{1}{2}$; (2)$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{2x^2+m}\ge 1$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+m}\ge 1-2x$

$\Leftrightarrow 2x^2+m\ge 1-4x+4x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+1\le m$

Đặt $f(x)=2x^2-4x+1$

$f(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ nên $f(x)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\ \forall x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Do đó hệ có nghiệm **duy nhất** $\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 7.** Cho $a,b$ là các số dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a+b=2019$ để phương trình $5\log_a x.\log_b x-4\log_a x-3\log_b x-2019=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$. Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1x_2)$ bằng $\dfrac{3}{5}\ln\left(\dfrac{m}{7}\right)+\dfrac{4}{5}\ln\left(\dfrac{n}{7}\right)$, với $m,n$ là các số nguyên dương. Tính $S=m+2n$.

**A.** 2019. **B.** 14133. **C.** 22209. **D.** 20190.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $5\log_a x.\log_b x-4\log_a x-3\log_b x-2019=0 \Leftrightarrow 5\dfrac{\ln x}{\ln a}.\dfrac{\ln x}{\ln b}-4\dfrac{\ln x}{\ln a}-3\dfrac{\ln x}{\ln b}-2019=0.$

Đặt $t=\ln x$. Ta được phương trình: $\dfrac{5t^2}{\ln a.\ln b}-\left(\dfrac{3\ln a+4\ln b}{\ln a.\ln b}\right)t-2019=0$ (*)

Do $a,\, b>1 \Rightarrow \ln a.\ln b>0$. Vậy (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $t_1,\, t_2$. Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\, x_2$.

Mặt khác ta có: $t_1+t_2=\dfrac{3\ln a+4\ln b}{5}=\dfrac{3\ln a+4\ln(2019-a)}{5}$.

$\Rightarrow \ln(x_1.x_2)=\ln x_1+\ln x_2=t_1+t_2=\dfrac{3\ln a+4\ln(2019-a)}{5}$

Vì $a>1$, $b>1$ và $a+b=2019$ nên $a\in(1;2018)$.

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{3\ln u+4\ln(2019-u)}{5}$ trên $(1;2018)$.

Ta có $f'(u)=\dfrac{6057-7u}{5u(2019-u)} \Rightarrow f'(u)=0 \Leftrightarrow u=\dfrac{6057}{7}$

Bảng biến thiên:

| $u$ | $1$ | $\dfrac{6057}{7}$ | $2018$ |
|---|---|---|---|
| $f'(u)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(u)$ | $\nearrow$ | $\dfrac{3}{5}\ln\dfrac{6057}{7}+\dfrac{4}{5}\ln\dfrac{8076}{7}$ | $\searrow$ |

Vậy giá trị lớn nhất của $\ln(x_1x_2)$ bằng $\dfrac{3}{5}\ln\dfrac{6057}{7}+\dfrac{4}{5}\ln\dfrac{8076}{7}$.

Do đó $m=6075,\ n=8076$ hay $S=m+2n=22209$.

**Câu 8.** **(Thi Thử Cẩm Bình Cẩm Xuyên Hà Tĩnh 2019)** Chị Minh vay ngân hàng $200$ triệu đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất chị Minh trả $6$ triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là $0,5\%$ mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu, chị Minh trả hết số tiền trên?

**A.** $47$ tháng. **B.** $36$ tháng. **C.** $46$ tháng. **D.** $37$ tháng.

**Lời giải**

**Chọn D**

Sau tháng thứ $1$ chị Minh còn nợ ngân hàng: $200(1+r)^1-6$.

Sau tháng thứ $2$ chị Minh còn nợ ngân hàng: $\left[200(1+r)^1-6\right](1+r)-6=200(1+r)^2-6(1+r)-6$.

Sau tháng thứ $3$ chị Minh còn nợ ngân hàng:

$\left[200(1+r)^2-6(1+r)-6\right](1+r)-6=200(1+r)^3-6(1+r)^2-6(1+r)-6$.

……………

Sau tháng thứ $N$ chị Minh còn nợ ngân hàng:

$200(1+r)^N-6(1+r)^{N-1}-\ldots-6(1+r)^2-6(1+r)-6$.

Nếu sau tháng thứ N chị Minh trả hết nợ thì:

$$200(1+r)^N-6(1+r)^{N-1}-...-6(1+r)^2-6(1+r)-6=0$$

$$\Leftrightarrow 200(1+r)^N=6(1+r)^{N-1}+...+6(1+r)^2+6(1+r)+6$$

$$\Leftrightarrow 200(1+r)^N=6\left[(1+r)^{N-1}+...+(1+r)^2+(1+r)+1\right]$$

$$\Leftrightarrow 200(1+r)^N=6.1.\frac{1-(1+r)^N}{1-(1+r)}$$

$$\Leftrightarrow 100r(1+r)^N=3(1+r)^N-3$$

$$\Leftrightarrow (1+r)^N=\frac{3}{3-100r}\Leftrightarrow N=\log_{1+r}\left(\frac{3}{3-100r}\right)=\log_{1+\frac{0,5}{100}}\left(\frac{3}{3-100.\frac{0,5}{100}}\right)\approx 36,56$$

**Câu 9.** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(\cos x)=2\log_3(\cot x)$ trên đoạn $[5;25]$ bằng

**A.** $7\pi$. **B.** $\frac{40\pi}{3}$. **C.** $13\pi$ **D.** $\frac{70\pi}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo đề bài: $\log_2(\cos x)=2\log_3(\cot x)$ $(1)$.

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x>0\\ \cot x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x>0\\ \sin x>0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x>0$ $(*)$.

Đặt $t=\log_2(\cos x)\Rightarrow \cos x=2^t$.

$$\Rightarrow 2\log_3(\cot x)=\log_3(\cot^2 x)=\log_3\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\log_3\left(\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right)=\log_3\left(\frac{2^{2t}}{1-2^{2t}}\right).$$

Khi đó, $(1)$ trở thành: $t=\log_3\left(\frac{4^t}{1-4^t}\right)\Leftrightarrow \frac{4^t}{1-4^t}=3^t$ $(2)$.

Điều kiện: $1-4^t\neq 0\Leftrightarrow 4^t\neq 1\Leftrightarrow t\neq 0$.

$(2)\Leftrightarrow 4^t=3^t-12^t\Leftrightarrow 4^t+12^t=3^t\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t+4^t=1$ $(3)$.

Dễ thấy $t=0$ không là nghiệm của $(3)$ nên ta xét hàm số $f(t)=\left(\frac{4}{3}\right)^t+4^t$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

$f'(t)=\left(\frac{4}{3}\right)^t.\ln\frac{4}{3}+4^t.\ln 4>0$ $\forall t\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (2)$ chỉ có tối đa một nghiệm, mà $f(-1)=1$

$\Rightarrow t=-1$ là nghiệm duy nhất của $(3)$.

Do đó, $\cos x=2^{-1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+m2\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+n2\pi\end{array}\right.$ $(m,\ n\in\mathbb{Z})$.

Ta chỉ nhận $x=\frac{\pi}{3}+m2\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ vì thỏa mãn $(*)$.

Để $x\in[5;25]$ thì $5<\frac{\pi}{3}+m2\pi<25\Leftrightarrow \frac{5}{2\pi}-\frac{1}{6}<m<\frac{25}{2\pi}-\frac{1}{6}\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$.

$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2\pi ; \frac{\pi}{3} + 4\pi ; \frac{\pi}{3} + 6\pi \right\}$.

Vậy tổng các nghiệm bằng $\frac{\pi}{3} \cdot 3 + (2+4+6)\pi = 13\pi$.

**Câu 10.** Cho biết $\log_2\left( \sum_{k=1}^{100} k.2^k - 2 \right) = a + \log_c b$ với $a, b, c$ là các số nguyên và $a > b > c > 1$. Tổng $a+b+c$ là

**A.** $201$. **B.** $200$. **C.** $203$. **D.** $202$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt

$$T = \sum_{k=1}^{100} k.2^k = 2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \cdots + 100.2^{100} \ (1).$$

Khi đó, ta có

$$2T = 2^2 + 2.2^3 + \cdots + 99.2^{100} + 100.2^{101} \ (2).$$

Lấy (2) trừ (1) vế theo vế ta được

$$T = 100.2^{101} - \left(2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{100}\right) = 99.2^{101} + 2$$

Suy ra $\log_2\left( \sum_{k=1}^{100} k.2^k - 2 \right) = \log_2\left(99.2^{101}\right) = 101 + \log_2 99$.

Do đó $a = 101$; $b = 99$; $c = 2$.

Vậy $a+b+c = 202$.

**Câu 11.** Cho $x, y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019} x + \log_{2019} y \ge \log_{2019}\left(x^2 + y\right)$. Gọi $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x + y$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $T_{\min} \in (8;9)$. **B.** $T_{\min} \in (7;8)$. **C.** $T_{\min} \in (6;7)$. **D.** $T_{\min} \in (5;6)$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta có:

$\log_{2019} x + \log_{2019} y \ge \log_{2019}\left(x^2+y\right) \Leftrightarrow \log_{2019} xy \ge \log_{2019}\left(x^2+y\right) \Leftrightarrow xy \ge x^2 + y$

$\Leftrightarrow y(x-1) \ge x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge \dfrac{x^2}{x-1} \\ x > 1 \end{cases}$

Ta có: $T = 2x + y \ge 2x + \frac{x^2}{x-1} = 3x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

Xét hàm số: $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x-1}; x > 1$.

Đạo hàm: $f'(x) = 3 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} (do\ x > 1)$.

Bảng biến thiên.

| $x$ | $1$ | | $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4+2\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Do đó: $T_{\min}=4+2\sqrt{3}$.

**Câu 12.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng $500$ triệu theo phương thức trả góp với lãi suất $0,85\%$ / tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là $10$ triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (tháng cuối có thể trả dưới $10$ triệu đồng).

**A.** $65$. **B.** $66$. **C.** $67$. **D.** $68$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $N=500$ triệu là số tiền đã vay , $A=10$ triệu là số tiền trả trong mỗi tháng và $r=0,85\%$ là lãi suất ngân hàng, $n$ là số tháng anh An phải trả hết nợ.

Theo đề bài

Cuối tháng thứ nhất anh An còn nợ số tiền là $N+Nr-A=N(1+r)-A$.

Cuối tháng thứ hai anh An còn nợ số tiền là

$\left[N(1+r)-A\right]+\left[N(1+r)-A\right]r-A=N(1+r)^2-A\left[(1+r)+1\right]$.

Cuối tháng thứ ba anh An còn nợ số tiền là

$\left[N(1+r)^2-A\left[(1+r)+1\right]\right](1+r)-A=N(1+r)^3-A\left[(1+r)^2+(1+r)+1\right]$.

….

Cuối tháng thứ $n$ anh An còn nợ số tiền là $N(1+r)^n-A\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+...+(1+r)+1\right]$.

Để sau $n$ tháng anh An trả hết nợ thì

$N(1+r)^n-A\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+...+(1+r)+1\right]=0$

$\Leftrightarrow N(1+r)^n=A\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+...+(1+r)+1\right]\Leftrightarrow N(1+r)^n=A\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$

$\Leftrightarrow (1+r)^n=\dfrac{A}{A-Nr}\Leftrightarrow n=\log_{(1+r)}\left(\dfrac{A}{A-Nr}\right)$.

Áp dụng ta có $n=\log_{(1+0,0085)}\left(\dfrac{10}{10-500.0,0085}\right)\Leftrightarrow n\approx 65,38$.

Vậy anh An phải trả trong vòng $66$ tháng.

**Câu 13.** Cho $x,y$ là hai số thực dương thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+18}{x}$.

**A.** $9$. **B.** $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1+9\sqrt{2}$. **D.** $17$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}\Leftrightarrow 4+3^{x^2-2y+2}=\left[2+3^{2(x^2-2y)}\right].7^{2y-x^2+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4+3^{x^2-2y+2}}{7^{x^2-2y+2}}=\dfrac{2+3^{2(x^2-2y)}}{7^{2(x^2-2y)}}$ (*).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4+3^t}{7^t}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(t)=4.\left(\dfrac{1}{7}\right)^t+\left(\dfrac{3}{7}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(*) $\Leftrightarrow f\left(x^2-2y+2\right)=f\left[2(x^2-2y)\right]\Leftrightarrow x^2-2y+2=2(x^2-2y)\Leftrightarrow x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$.

Từ đó $P=\dfrac{x^2+x+16}{x}=x+\dfrac{16}{x}+1\geq 2\sqrt{x.\dfrac{16}{x}}+1\Leftrightarrow P\geq 9$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x=4$.

-----------------HẾT---------------

**Câu 14.** Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó.Hỏi sau 1 năm số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam nhận được là bao nhiêu? ( Giả sử lãi suất không thay đổi).

**A.** $209,25$ triệu đồng. **B.** $208,25$ triệu đồng.

**C.** $210,45$ triệu đồng. **D.** $218,64$ triệu đồng.

**Lời giải**

**Chọn D**

• Số tiền anh Nam nhận được sau 6 tháng (tức 2 quý) là:

$T_1=100\left(1+3^0/_0\right)^2=106,09$ triệu đồng.

• Số tiền anh Nam nhận được sau một năm (tức 2 quý còn lại của năm) là:

$T_2=\left(106,09+100\right)\left(1+3^0/_0\right)^2\approx 218,64$ triệu đồng.

**Câu 15.** **(SGD Nam Định_Lần 1_2018-2019)**Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $m^2\left(x^5-x^4\right)-m\left(x^4-x^3\right)+x-\ln x-1\geq 0$ thỏa mãn với mọi $x>0$. Tính tổng các giá trị trong tập hợp *S*.

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $-2$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $f\left(x\right)=m^2\left(x^5-x^4\right)-m\left(x^4-x^3\right)+x-\ln x-1$. Ta có $f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\left(0;+\infty\right)$ và $f'\left(x\right)=m^2\left(5x^4-4x^3\right)-m\left(4x^3-3x^2\right)+1-\dfrac{1}{x}$.

Bất phương trình đã cho viết thành $f\left(x\right)\geq 0$. Giả sử $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là (C).

$f\left(x\right)\geq 0$ với mọi $x>0$ khi và chỉ khi đồ thị (C) không nằm phía dưới trục *Ox*.

Mặt khác (C) và *Ox* có điểm chung là $A\left(1;0\right)$. Nên điều kiện cần để đồ thị (C) không nằm phía dưới trục *Ox* là *Ox* tiếp xúc với (C) tại $A\left(1;0\right)$.

Suy ra, $f'\left(1\right)=0\Leftrightarrow m^2-m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$.

Với $m=0$ ta có bất phương trình đã cho trở thành $f\left(x\right)=x-\ln x-1\geq 0$.

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x) \geq 0, \forall x > 0$. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn điều kiện.

Với $m = 1$ ta có bất phương trình đã cho trở thành $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - \ln x + x - 1 \geq 0$.

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - \frac{1}{x} + 1 = \frac{5x^5 - 8x^4 + 3x^3 + x - 1}{x} = \frac{(x-1)(5x^4 - 3x^3 + 1)}{x}$$

Ta có $5x^4 - 3x^3 + 1 = \left(2x^2 - \frac{3}{4}x\right)^2 + \left(x^2 - \frac{9}{32}\right)^2 + 1 - \left(\frac{9}{32}\right)^2 > 0$.

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x) \geq 0, \forall x > 0$. Suy ra $m = 1$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $S = \{0;1\}$.

**Câu 16.** Ông A muốn mua một chiếc ô tô trị giác 1 tỉ đồng, nhưng vì chưa đủ tiền nên ông chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng là như nhau) với lãi suất 12%/ năm và trả trức 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm, kể từ ngày mua xe, ông trả hết nợ, biết kỳ trả nợ đầu tiên sau ngày mua ô tô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

**A.** 22.703.000 (đồng). **B.** 24.443.000 (đồng).

**C.** 23.573.000 (đồng). **D.** 23.537.000 (đồng).

**Lời giải**

**Chọn D**

***Chú ý:*** Cho bài toán sau:

Vay *M* đồng từ ngân hàng với lãi suất *x*% = *r* mỗi tháng. Hỏi háng tháng phải trả bao nhiêu để sau *n* tháng hết nợ. (Trả tiền vào cuối tháng).

PP giải:

Cuối tháng thứ nhất, số tiền người đó còn nợ là $N_1 = M(1+r) - a$ đồng

Cuối tháng thứ hai, số tiền người đó còn nợ là

$N_2 = N_1.(1+r) - a = M(1+r)^2 - a(1+r) - a$

Cuối tháng thứ ba, số tiền người đó còn nợ là:

$N_3 = N_2(1+r) - a = M(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a.(1+r) - a$

…

Cuối tháng thứ *n* số tiền người đó còn nợ là:

$$N_n = M(1+r)^n - a\left(1 + (1+r) + (1+r)^2 + ... + (1+r)^{n-1}\right) = M(1+r)^n - a.\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Để hết nợ sau *n* tháng thì số tiền còn nợ sau *n* tháng là 0, tức là ta giải phương trình

$M(1+r)^n - a.\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{M(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1}$ (số tiền phải trả mỗi tháng).

Lãi suất là 12%/ năm nên mỗi tháng lãi suất là 1%.

Thời gian trả trong 2 năm, tức là 24 tháng.

Trả tước 500 triệu nên số nợ ban đầu ông A nợ là 500 triệu.

Áp dụng công thức mua trả góp, ta có số tiền ông A phải trả mỗi tháng là:

$$a=\frac{M.(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}=\frac{500.000.000.(1+0,01)^{24}.0,01}{(1+0,01)^{24}-1}\approx 23.536736\approx 23.537.000 \text{ (đồng)}.$$

**Câu 17.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-8;+\infty)$ để phương trình sau có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt $x^2+x(x-1)2^{x+m}+m=(2x^2-x+m)2^{x-x^2}$.

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $5$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình đã cho tương đương với

$(x^2+m)+(x^2-x)2^{(x^2+m)-(x^2-x)}=\left[(x^2+m)+(x^2-x)\right]2^{x-x^2}\ (1)$.

Đặt $x^2+m=a; x^2-x=b$ ta có phương trình $(1)$ trở thành

$a+b.2^{a-b}=(a+b).2^{-b}\Leftrightarrow a.2^b+b.2^a=a+b\Leftrightarrow a(2^b-1)+b(2^a-1)=0(2)$.

*Trường hợp* 1: Nếu $ab\neq 0$ thì phương trình $(2)\Leftrightarrow \frac{2^a-1}{a}+\frac{2^b-1}{b}=0(3)$.

+ Nếu $a>0\Rightarrow 2^a-1>0\Rightarrow\frac{2^a-1}{a}>0$.

+ Nếu $a<0\Rightarrow 2^a-1<0\Rightarrow\frac{2^a-1}{a}>0$.

Do đó $\frac{2^a-1}{a}>0,$ với $a\neq 0$.

Tương tự ta có $\frac{2^b-1}{b}>0,$ với $b\neq 0$. Do vậy phương trình $(3)$ vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $ab=0$ thì phương trình $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=-m\\x^2-x=0\end{array}\right.$.

Phương trình $(1)$ có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 0\\m^2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<0.$

Do $m$ nguyên và $m\in(-8;+\infty)$ nên có $7$ giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 18.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Cho các số thực $a,b$ thoả mãn $a>\frac{1}{3},b>1$. Khi biểu thức $\log_{3a}b+\log_b(a^4-9a^2+81)$ nhỏ nhất thì tổng $a+b$ bằng

**A.** $2+9\sqrt{2}$. **B.** $9+2^{\sqrt{3}}$. **C.** $3+9^{\sqrt{2}}$. **D.** $3+3\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$P=\log_{3a}b+\log_b(a^4-9a^2+81)\ge 2\sqrt{\log_{3a}b\log_b(a^4-9a^2+81)}=2\sqrt{\log_{3a}(a^4-9a^2+81)}$

$a^4+81\ge 2\sqrt{a^4.81}=18a^2\Rightarrow 2\sqrt{\log_{3a}(a^4-9a^2+81)}\ge 2\sqrt{\log_{3a}(18a^2-9a^2)}=2\sqrt{\log_{3a}(9a^2)}=2\sqrt{2}$

$P_{\min}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4=81\\\log_{3a}b=\log_b(a^4-9a^2+81)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\\log_9 b=\log_b 81\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=9^{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow a+b=3+9^{\sqrt{2}}$

**Câu 19.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]** Cho $f(1)=1; f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in N^*$. Tính giá trị của biểu thức

$T = \log\left[\dfrac{f(2019) - f(2009) - 145}{2}\right]$

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $10$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f(2019) = f(2009+10) = f(2009) + f(10) + 20090$

Do đó $f(2019) - f(2009) - 145 = f(10) + 20090 - 145$

$f(10) = f(9) + f(1) + 9$

$f(9) = f(8) + f(1) + 8$

..................

$f(3) = f(2) + f(1) + 2$

$f(2) = f(1) + f(1) + 1$

Từ đó cộng vế với vế ta được: $f(10) = 10.f(1) + 1 + 2 + .... + 8 + 9 = 55$.

Vậy $\log\left[\dfrac{f(2019) - f(2009) - 145}{2}\right] = \log\dfrac{20090 - 145 + 55}{2} = \log 10000 = 4.$

**Câu 20.** Cho hai số thực $a$, $b$ thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ là

**A.** $\sqrt{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Do $a^2 + b^2 > 1$ nên từ $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1 \Rightarrow a + b \geq a^2 + b^2 > 1$.

Suy ra: $\begin{cases} a^2 + b^2 > 1 \\ \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó:

$$P = 2a + 4b - 3 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 4\left(b - \frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{\left(2^2 + 4^2\right).\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right]} \leq \sqrt{20.\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{10}$$

(Áp dụng BĐT Bu-nhi-a- Cốp -xki)

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{a - \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{b - \frac{1}{2}}{4} > 0 \\ \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \\ a^2 + b^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ b = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$

Vậy $P_{\max} = \sqrt{10}$ khi $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ b = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$.

**Câu 21.** Một người gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $0,6\%$ /tháng theo cách sau: mỗi tháng (vào đầu tháng) người đó gửi vào ngân hàng 5 triệu đồng và ngân hàng tính lãi suất (lãi suất không đổi) dựa trên số tiền tiết kiệm thực tế có trong ngân hàng. Hỏi sau 10 năm, số tiền của người đó có được gần nhất với số tiền nào dưới đây (cả gốc và lãi, đơn vị triệu đồng)?

**A.** $880,29$. **B.** $880,16$. **C.** $880$. **D.** $880,26$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: 10 năm = 120 tháng. Đơn vị của $T_i$ là triệu đồng.

+ Sau tháng thứ nhất, tổng tiền gốc và lãi là: $T_1 = 5(1+0,6\%)$

+ Đầu tháng thứ hai, người đó gửi thêm 5 triệu nên tiền gốc đầu tháng thứ hai là $T_1 + 5$

Sau tháng thứ hai, tổng tiền gốc và lãi là:

$$T_2 = (T_1+5)(1+0,6\%) = \left[5(1+0,6\%)+5\right](1+0,6\%) = 5\left[(1+0,6\%)^2 + (1+0,6\%)\right]$$

+ Đầu tháng thứ ba, người đó gửi thêm 5 triệu nên tiền gốc đầu tháng thứ ba là $T_2 + 5$

Sau tháng thứ ba, tổng tiền gốc và lãi là:

$$T_3 = (T_2+5)(1+0,6\%) = 5\left[(1+0,6\%)^3 + (1+0,6\%)^2 + (1+0,6\%)\right]$$

+ Đầu tháng thứ tư, người đó gửi thêm 5 triệu nên tiền gốc đầu tháng thứ tư là $T_3 + 5$

Sau tháng thứ tư, tổng tiền gốc và lãi là:

$$T_4 = (T_3+5)(1+0,6\%) = 5\left[(1+0,6\%)^4 + (1+0,6\%)^3 + (1+0,6\%)^2 + (1+0,6\%)\right]$$

…

Sau120 tháng tổng tiền gốc và lãi là:

$$T_{120} = 5.\left[(1+0,6\%)^{120} + (1+0,6\%)^{119} + \ldots + (1+0,6\%)^2 + (1+0,6\%)\right] = 5\sum_{n=1}^{120}(1+0,6\%)^n$$

Tới đây có 2 cách để tính $T_{120}$

+ Cách trắc nghiệm: dùng chức năng tính tổng xích ma trong máy tính suy ra $T_{120} \approx 880,265$

+ Cách tự luận: Đặt $S = (1+0,6\%)^{120} + (1+0,6\%)^{119} + \ldots + (1+0,6\%)^2 + (1+0,6\%)$, ta thấy $S$ là tổng của một cấp số nhân có 120 số hạng và $\begin{cases} u_1 = 1+0,6\% \\ q = 1+0,6\% \end{cases}$, nên

$$S = (1+0,6\%).\frac{1-(1+0,6\%)^{120}}{1-(1+0,6\%)} \Rightarrow T_{120} = 5.S \approx 880,265$$

**Câu 22.** Xét các số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

**A.** $P_{\min} = \dfrac{17}{2}$. **B.** $P_{\min} = 8$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{25\sqrt{2}}{4}$. **D.** $P_{\min} = 9$.

**Lời giải.**

**Chọn D**

Ta có:

$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(xy) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right) \Leftrightarrow xy \ge x + y^2$

$\Leftrightarrow x(y-1) \ge y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{y^2}{y-1} \\ y > 1 \end{cases}$ ( Vì $x; y > 0$).

Ta có: $P = x + 3y \ge \dfrac{y^2}{y-1} + 3y = 4y + 1 + \dfrac{1}{y-1}$.

Xét hàm số: $f(y) = 4y + 1 + \dfrac{1}{y-1}; y > 1$.

Đạo hàm: $f'(y) = 4 - \dfrac{1}{(y-1)^2}$.

$$f'(y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{3}{2}(n)\\ y=\dfrac{1}{2}(l)\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên.

| $y$ | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(y)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(y)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $9$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ**

**Câu 23.** **(Thi Thử Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1. 2018-2019)** Cho cấp số cộng $(a_n)$, cấp số nhân $(b_n)$, thỏa mãn $a_2>a_1\ge 0$, $b_2>b_1\ge 1$ và hàm số $f(x)=x^3-3x$ sao cho $f(a_2)+2=f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2)+2=f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương $n$ nhỏ nhất sao cho $b_n>2019a_n$.

**A.** 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả thiết $a_2>a_1\ge 0\Rightarrow\begin{cases}d=a_2-a_1>0\\ a_2=a_1+d\end{cases}$

$f(a_2)+2=f(a_1)\Leftrightarrow f(a_1+d)+2=f(a_1)\Leftrightarrow(a_1+d)^3-3(a_1+d)+2=a_1^3-3a_1$

$\Leftrightarrow 3a_1d(a_1+d)+(d-1)^2(d+2)=0\ \ (a_1+d>0,d+2>0)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=0\\ d=1\end{cases}$. Khi đó $a_n=a_1+(n-1)d=n-1$.

Giả thiết $b_2>b_1\ge 1\Rightarrow\begin{cases}q=\dfrac{b_2}{b_1}>1\\ b_2=b_1q\end{cases}\Rightarrow\log_2(b_2)=\log_2(b_1q)=\log_2 b_1+\log_2 q$

Đặt $t_2=\log_2 b_2, t_1=\log_2 b_1, a=\log_2 q$

$f(t_2)+2=f(t_1)\Leftrightarrow t_2^3-3t_2+2=t_1^3-3t_1\Leftrightarrow 3at_1(t_1+a)+(a-1)^2(a+2)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=0\\ a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 b_1=0\\ \log_2 q=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_1=1\\ q=2\end{cases}$. Khi đó $b_n=b_1.q^{n-1}=2^{n-1}$.

$b_n>2019a_n\Leftrightarrow 2^{n-1}>2019(n-1)\Leftrightarrow n>15,874$.

Vậy $n=16$.

**Câu 24.** Cho hai số thực $x,y$ lớn hơn 1 và thỏa mãn $y^x.(e^x)^{e^y}\ge x^y.(e^y)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x$.

**A.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với $x,y>1$, ta có

$$y^x.(e^x)^{e^y} \geq x^y.(e^y)^{e^x}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(y^x.(e^x)^{e^y}\right) \geq \ln\left(x^y.(e^y)^{e^x}\right)$$
$$\Leftrightarrow x\ln y + xe^y \geq y\ln x + ye^x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln y}{y} + \frac{e^y}{y} \geq \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x} (1).$$

Xét hàm số $g(t) = te^t - e^t + 1 - \ln t$ trên $[1;+\infty)$, có $g'(t) = te^t - \frac{1}{t} > 0, \forall t \geq 1$.

Hàm số $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên $g(t) > g(1) = 1 > 0, \forall t > 1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t} + \frac{e^t}{t}$ trên $(1;+\infty)$, có $f'(t) = \frac{g(t)}{t^2} > 0, \forall t > 1$, nên $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Với $x, y > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) \Leftrightarrow y \geq x$.

Đặt $u = \log_x y$. Do $y \geq x > 1$ nên $u \geq 1$. Ta có $P = h(u) = \frac{1+u}{2} + \frac{1}{u}$. Nhận thấy $h'(u) = \frac{u^2-2}{2u^2}$, nên $h'(u) = 0$ khi $u = \sqrt{2}$, $h'(u) < 0$ khi $1 \leq u < \sqrt{2}$, $h'(u) > 0$ khi $u > \sqrt{2}$. Dẫn tới $P = h(u) \geq h\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}, \forall u \geq 1$, đẳng thức xảy ra khi $u = \sqrt{2}$. Vậy $\min P = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$, đạt được khi $y = x^{\sqrt{2}}$ và $x > 1$.

**Câu 25.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

**A.** $-2016$. **B.** $-2020$. **C.** $2016$. **D.** $2020$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $x_G = 2 + \log_a \frac{1}{2018} = 2 - \log_a 2018$

Ta có $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right) = f(2 - \log_a 2018) = f(x_G)$

Giả sử $G(x_G; y_G)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ và có điểm đối xứng qua điểm $I$ là $G'(x_{G'}; y_{G'})$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$.

Ta có $I(1;1)$ là trung điểm của $GG'$.

Do đó ta có $\frac{x_G + x_{G'}}{2} = x_I \Rightarrow \frac{2 - \log_a 2018 + x_{G'}}{2} = 1 \Rightarrow x_{G'} = \log_a 2018$

$G'(x_{G'}; y_{G'})$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$ nên $y_{G'} = a^{\log_a 2018} = 2018$

Ta lại có $\frac{y_G + y_{G'}}{2} = y_I \Rightarrow \frac{y_G + 2018}{2} = 1 \Rightarrow y_G = -2016$.

Vậy $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right) = f(x_G) = y_G = -2016$.

**Câu 26.** Cho $f(x)$ là một đa thức hệ số thực có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = (1-m)x + m^2 - 3\ (m \in \mathbb{R})$ thỏa mãn tính chất: mọi tam giác có độ dài ba cạnh $a, b, c$ thì các số $g(a), g(b), g(c)$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

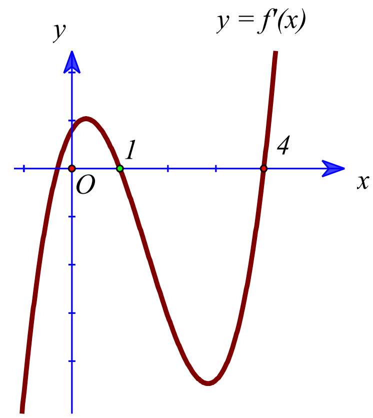
Khẳng định nào sau đây là đúng về hàm số $y = f\left[(mx + m - 1)^2\right] - e^{mx+1}$?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(4;9)$.

**B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ và đồng biến trên khoảng $(4;9)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{3};0\right)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{4}{3};-1\right)$.




**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:**

Ta có $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b-c>0 \\ a+c-b>0 \\ b+c-a>0 \end{cases}$ (*)

Ba số $\alpha a+\beta,\ \alpha b+\beta,\ \alpha c+\beta\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ là độ dài ba cạnh một tam giác

$\begin{cases} \alpha a+\beta>0,\ \alpha b+\beta>0,\ \alpha c+\beta>0 \\ \alpha(a+b-c)+\beta>0 \\ \alpha(a+c-b)+\beta>0 \\ \alpha(b+c-a)+\beta>0 \end{cases}$ ( với mọi $a,\ b,\ c$ thỏa mãn (*)) $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\ge 0,\beta\ge 0 \\ \alpha^2+\beta^2>0 \end{cases}$.

Áp dụng vào bài toán ta có $\begin{cases} 1-m\ge 0 \\ m^2-3\ge 0 \\ (1-m)^2+(m^2-3)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le -\sqrt{3}$.

Với $m\le -\sqrt{3}$ ta có $y=-e^{mx+1}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét hàm số $y=f\left[(mx+m-1)^2\right]$ có $y'=2m(mx+m-1)f'\left[(mx+m-1)^2\right]$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx+m-1=0 \\ mx+m-1=\pm 1 \\ mx+m-1=\pm 2 \end{array}\right.$. Do $m\le -\sqrt{3}$ nên phương trình có 5 nghiệm phân biệt

$x_1=\dfrac{3-m}{m}<x_2=\dfrac{2-m}{m}<x_3=\dfrac{1-m}{m}<x_4=-1<x_5=\dfrac{-1-m}{m}$.

Bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y=f\left[(mx+m-1)^2\right]$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $x_3$ | | $x_4$ | | $x_5$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y’ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

Suy ra hàm số $y=f\left[(mx+m-1)^2\right]$ đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{3-m}{m};\frac{2-m}{m}\right)$, $\left(\frac{1-m}{m};-1\right)$ và $\left(\frac{-1-m}{m};+\infty\right)$.

Với $m\le-\sqrt{3}$ ta có $\left(-\frac{4}{3};-1\right)\subset\left(\frac{1-m}{m};-1\right)$.

**Cách 2:** Chọn $m=-2$ khi đó $g(x)=3x+1$ thỏa mãn điều kiện mọi tam giác có độ dài ba cạnh $a,\ b,\ c$ thì các số $g(a),\ g(b),\ g(c)$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Với $m=-2$ ta có $y=-e^{-2x+1}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét hàm số $y=f\left[(-2x-3)^2\right]$ có $y'=-4(-2x-3)f'\left[(-2x-3)^2\right]$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x-3=0\\-2x-3=\pm1\\-2x-3=\pm2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{3}{2}\\x=-2\\x=-1\\x=-\frac{5}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y=f\left[(-2x-3)^2\right]$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{2}$ | | $-2$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y’ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

Suy ra hàm số $y=f\left[(mx+m-1)^2\right]$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{5}{2};-2\right)$, $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$, ta có $\left(-\frac{4}{3};-1\right)\subset\left(-\frac{3}{2};-1\right)$.

**Câu 27.** Biết $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với $a,b$ là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=16$. **B.** $a+b=14$. **C.** $a+b=13$. **D.** $a+b=11$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>0, x\ne\frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(4x^2-4x+1\right)+4x^2-4x+1=\log_7\left(2x\right)+2x$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_7 t+t$ có $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0 \quad \forall t>0$ nên là hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Do đó ta có $4x^2-4x+1=2x \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Khi đó

$x_1+2x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}+2\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{1}{4}\left(9+\sqrt{5}\right)$ hoặc $x_1+2x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}+2\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}=\dfrac{1}{4}\left(9-\sqrt{5}\right)$.

Vậy $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4};x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$. Do đó $a=9;b=5$ và $a+b=9+5=14$.

**Câu 28.** Xét các số nguyên dương $a,\ b$ sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3,\ x_4$ thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=2a+3b$

**A.** $S_{\min}=25$. **B.** $S_{\min}=33$. **C.** $S_{\min}=30$. **D.** $S_{\min}=17$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện để hai phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ và $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt là: $b^2-20a>0$. (*)

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}\ln x_1+\ln x_2=-\dfrac{b}{a}\\ \log x_3+\log x_4=-\dfrac{b}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ln\left(x_1x_2\right)=-\dfrac{b}{a}\\ \log\left(x_3x_4\right)=-\dfrac{b}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1x_2=e^{-\frac{b}{a}}\\ x_3x_4=10^{-\frac{b}{5}}\end{cases}$.

Mà $x_1x_2>x_3x_4 \Rightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\dfrac{b}{a}>-\dfrac{b}{5}\ln 10$ (Vì $a,\ b$ là các số nguyên dương)

$\Rightarrow a>\dfrac{5}{\ln 10} \Rightarrow a\ge 3$. (1)

Theo điều kiện (*) có $b^2-20a>0 \Rightarrow b^2>20a\ge 60 \Rightarrow b\ge 8$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S=2a+3b\ge 30 \Rightarrow S_{\min}=30 \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=8\end{cases}$ (thỏa mãn các điều kiện đề bài).

**Câu 29.** [HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN] Cho $f(1)=1;f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in N^*$. Tính giá trị của biểu thức

$T=\log\left[\dfrac{f\left(2019\right)-f\left(2009\right)-145}{2}\right]$

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** $10$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f(2019)=f(2009+10)=f(2009)+f(10)+20090$

Do đó $f(2019)-f(2009)-145=f(10)+20090-145$

$f(10)=f(9)+f(1)+9$

$f(9)=f(8)+f(1)+8$

..................

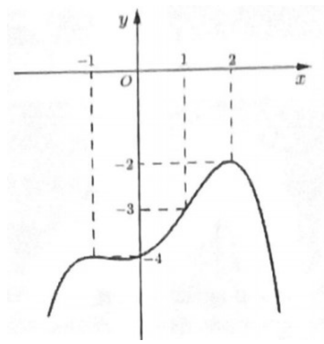
$f(3)=f(2)+f(1)+2$

$f(2)=f(1)+f(1)+1$

Từ đó cộng vế với vế ta được: $f(10)=10.f(1)+1+2+....+8+9=55.$

Vậy $\log\left[\dfrac{f(2019)-f(2009)-145}{2}\right]=\log\dfrac{20090-145+55}{2}=\log 10000=4.$

**Câu 30.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ




Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình

$9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\le\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$

đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$ là

**A.** 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\le\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}\ (*)$$

Đặt $t=f(x)\in(-\infty;-2]$.

Bất phương trình (*) theo $t$: $9.6^t+\left(4-t^2\right).9^t\le\left(-m^2+5m\right).4^t$

$\Leftrightarrow 9.\left(\dfrac{3}{2}\right)^t+\left(4-t^2\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}\le -m^2+5m$ (**)

Đặt: $g(t)=9.\left(\dfrac{3}{2}\right)^t+\left(4-t^2\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t.\left[9+\left(4-t^2\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^t\right]$, $t\in(-\infty;-2]$.

Xét hàm số: $h(t)=9+\left(4-t^2\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^t$ với $t\in(-\infty;-2]$

$h'(t)=-2t.\left(\dfrac{3}{2}\right)^t+\left(4-t^2\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^t.\ln\dfrac{3}{2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t.\left[-2t+\left(4-t^2\right).\ln\dfrac{3}{2}\right].$

$$h'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-1+\sqrt{1+4\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)^2}}{\ln\dfrac{3}{2}}>-2\\ t=\dfrac{-1-\sqrt{1+4\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)^2}}{\ln\dfrac{3}{2}}<-2\end{array}\right..$$

Ta có BBT:

| $t$ | $-\infty$ | | $\dfrac{-1-\sqrt{1+4\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)^2}}{\ln\dfrac{3}{2}}$ | | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $h(t)$ | 9 | $\searrow$ | | $\nearrow$ | 9 |

Từ BBT $\Rightarrow$ $h(t)\le 9\ \forall t\in(-\infty;-2]$ (1).

Vì $t\in(-\infty;-2]\Rightarrow 0<\left(\dfrac{3}{2}\right)^t\le\dfrac{4}{9}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $g(t)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t.\left[9+\left(4-t^2\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^t\right]\le 4\ \forall t\in(-\infty;-2]$

$\Rightarrow \max\limits_{(-\infty;-2]} g(t)=4$. (Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=-2$).

Bất phương trình (*) đúng với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ Bất phương trình (**) đúng với $\forall t\in(-\infty;-2]\Leftrightarrow -m^2+5m\ge\max\limits_{(-\infty;-2]} g(t)\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 4\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0\Leftrightarrow 1\le m\le 4$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên của $m$ là: $1+2+3+4=10$.

**Cách 2**

Bất phương trình: $9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\le\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$

$\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 9.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}$ (1)

Từ đồ thị suy ra $f(x)\le -2\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 9.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}\le 9.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}=4\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mặt khác, do $f(x)\le -2\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 4-f^2(x)\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\left(4-f^2(x)\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $g(x)=9.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 4\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -m^2+5m\ge\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)$

$\Leftrightarrow -m^2+5m\ge 4\Leftrightarrow 1\le m\le 4\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của $m$ là $1+2+3+4=10$.

**Câu 31.** **(Thi Thử Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1. 2018-2019)** Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2+2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

**A.** $3$. **B.** $-2$. **C.** $-3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $3^{x^2+2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2+2x+3}\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow 3^{x^2+2x+3-(2|x-m|+2)}=\log_{x^2+2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$

Đặt $\begin{cases} a = x^2 + 2x + 3 \\ b = 2|x-m| + 2 \end{cases}$ ta có $a > 1$, khi đó phương trình đã cho có dạng $3^{a-b} = \log_a b$.

+ Nếu $a > b$ thì $\begin{cases} 3^{a-b} > 1 \\ \log_a b < 1 \end{cases}$ không thỏa mãn.

+ Nếu $a < b$ thì $\begin{cases} 3^{a-b} < 1 \\ \log_a b > 1 \end{cases}$ không thỏa mãn.

Do đó $a = b$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 2x + 3 = 2|x-m| + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 1 = 2(x-m) \\ -(x^2 + 2x + 1) = 2(x-m) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 = -2m - 1 & (1) \\ x^2 + 4x + 1 - 2m = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Vì phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt nên ta xét ba trường hợp

- Trường hợp 1: Phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt và phương trình $(2)$ có 1 nghiệm khác các nghiệm của $(1)$ tức là: $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} \Delta_2' = 0 \\ 4 \neq -2m - 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} m = -\frac{3}{2} \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

- Trường hợp 2: Phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt và phương trình $(1)$ có 1 nghiệm khác các nghiệm của $(2)$ tức là: $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} \Delta_2' > 0 \\ 1 - 2m \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

- Trường hợp 3: Phương trình $(2)$ và phương trình $(1)$ đều có hai nghiệm trong đó có 1 nghiệm chung. Giả sử $x_0$ là một nghiệm chung của hai phương trình khi đó ta có

$\begin{cases} x_0^2 = -2m - 1 \\ x_0^2 + 4x_0 = 2m - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x_0^2 + 4x_0 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$. Thay vào hệ ta được $m = -1$. Thử lại ta thấy thỏa mãn

Vậy Tổng các giá trị của $m$ để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là $-\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) = -3$.

**Câu 32.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để tồn tại các số thực $x$, $y$ thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$.

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + 3x + 5y - 10 = e^{x+3y-9} + x + 3y - 9$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t,\ t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=e^t+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(t)=0$ có nghiệm là duy nhất. Tức là:

$3x+5y-10=x+3y-9\Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thay vào phương trình thứ 2, ta được:

$\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$

$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0\ (1)$.

Đặt $\log_5(x+5)=t\ (t\in\mathbb{R},\ x>-5)$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$t^2-(m+6)t+m^2+9=0$ (2).

Tồn tại $x$, $y$ thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm, tức là: $\Delta=(m+6)^2-4(m^2+9)\ge 0\Leftrightarrow -3m^2+12m\ge 0\Leftrightarrow 0\le m\le 4$.

Vậy có $5$ giá trị nguyên dương của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 33.** **(SỞ GD THANH HÓA_14-04-2019)** Bạn **H** trúng tuyển vào trường Đại học Ngoại Thương nhưng vì do không đủ tiền nộp học phí nên **H** quyết định vay ngân hàng trong bốn năm mỗi năm 4 triệu đồng để nộp học phí với lãi suất ưu đãi 3%/năm (theo thể thức lãi suất kép) biết rằng tiền vay mỗi năm **H** nhận được từ ngày đầu tiên của năm học và trong suốt bốn năm học **H** không trả tiền cho ngân hàng. Ngay sau khi tốt nghiệp Đại học (tròn 4 năm kể từ khi bạn **H** bắt đầu vay ngân hàng) bạn **H** thực hiện trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền (không đổi và tiền trả vào ngày cuối của tháng) với lãi suất theo cách tính mới là 0,25%/tháng và lãi suất được tính theo dư nợ thực tế, bạn **H** trả đúng 5 năm thì hết nợ. Tính số tiền hàng tháng mà bạn **H** phải trả cho ngân hàng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**A.** 398.402 (đồng). **B.** 309.718 (đồng). **C.** 312.518 (đồng). **D.** 323.582 (đồng).

**Lời giải**

**Chọn B**

**Xét bài toán 1:** Vay nhận vốn định kì lãi suất kép.

Gọi $A$ là số tiền mỗi năm bạn **H** vay ngân hàng, $r_1$ là lãi suất theo năm.

Cuối năm thứ nhất, **H** nợ ngân hàng với số tiền là $A.(1+r_1)$.

Đầu năm thứ hai, **H** nợ ngân hàng với số tiền là $A+A.(1+r_1)$.

Cuối năm thứ hai, **H** nợ ngân hàng với số tiền là

$$A+A.(1+r_1)+\left[A+A(1+r_1)\right]r_1=A(1+r_1)+A(1+r_1)^2.$$

Tiếp tục như vậy, cuối năm thứ *n* số tiền mà **H** nợ ngân hàng là:

$$B=A(1+r_1)+A(1+r_1)^2+...+A(1+r_1)^n=\frac{A(1+r_1)\left[(1+r_1)^n-1\right]}{r_1}.$$

**Xét bài toán 2:** Vay trả góp, lãi suất dư nợ thực tế.

Gọi $a$ là số tiền mà bạn **H** phải trả hàng tháng sau khi ra trường, $r_2$ là lãi suất mỗi tháng, số tiền **H** nợ ngân hàng là

*B*.

Cuối tháng thứ nhất bạn **H** còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B+B.r_2-a=B.(1+r_2)-a.$$

Cuối tháng thứ hai bạn **H** còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B.(1+r_2)-a+\left[B.(1+r_2)-a\right]r_2-a = B.(1+r_2)^2-\left[a+a(1+r_2)\right].$$

Cứ tiếp tục như vậy ta có công thức tổng quát.

Cuối tháng thứ *m* bạn **H** còn nợ ngân hàng số tiền là

$$B.(1+r_2)^m-\left[a+(1+r_2)a+(1+r_2)^2a+...+(1+r_2)^{m-1}a\right]$$

$$= B.(1+r_2)^m-a\frac{(1+r_2)^m-1}{r_2}.$$

Áp dụng 2 bài toán trên vào câu 42, ta có phương trình.

$$\frac{4.1,03\left[1,03^4-1\right]}{0,03}1,0025^{60}-a.\frac{1,0025^{60}-1}{0,0025}=0\Leftrightarrow a\approx 0,309718 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy số tiền mà **H** cần phải trả hàng tháng là 309.718 triệu đồng.

**Câu 34.** Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho phương trình:
$2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.log_2\left((x-1)^2+2\right)=2^{2|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)(*)$

Đặt $f(t)=2^t\log_2(t+2),\ t\ge 0$; $f'(t)=2^t\ln 2.\log_2(t+2)+2^t\frac{1}{(t+2)\ln 2}>0,\forall t\ge 0$.

Vậy hàm số $f(t)=2^t\log_2(t+2)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (*) ta có $f\left[(x-1)^2\right]=f\left[2|x-m|\right]\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2(x-m)=(x-1)^2\\2(x-m)=-(x-1)^2\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}g(x)=x^2-4x+1+2m=0\ (a)\\x^2=2m-1\ (b)\end{array}\right.$

Do các phương trình $(a)$ và $(b)$ là phương trình bậc hai nên để phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt ta có các trường hợp sau:

TH1: $m=\frac{1}{2}$, (b) chỉ có nghiệm kép bằng 0 và (a) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 (thỏa mãn).

TH2: $m>\frac{1}{2}$ , (b) có 2 nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{2m-1}$ và (a) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng $\pm\sqrt{2m-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(\pm\sqrt{2m-1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(\pm\sqrt{2m-1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{3}{2} \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn).

+ TH3: $m > \dfrac{1}{2}$, (b) có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2m-1}$ và (a) có nghiệm kép khác $\pm\sqrt{2m-1}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ g(\pm\sqrt{2m-1}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tổng các giá trị của $m$ là $\dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{3}{2} = 3$.

**Câu 35.** **(SGD Hưng Yên - 2019)** Cho các số thực $a, b, m, n$ sao cho $2m + n < 0$ và thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \log_2\left(a^2 + b^2 + 9\right) = 1 + \log_2\left(3a + 2b\right) \\ 9^{-m}.3^{-n}.3^{\frac{-4}{2m+n}} + \ln\left[\left(2m + n + 2\right)^2 + 1\right] = 81 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\left(a - m\right)^2 + \left(b - n\right)^2}$

**A.** $2\sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{5} - 2$. **C.** $2$. **D.** $\sqrt{5} - 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

- $\log_2\left(a^2 + b^2 + 9\right) = 1 + \log_2\left(3a + 2b\right) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 9 = 6a + 4b \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a - 4b + 9 = 0 \; (1)$

Gọi $A(a; b)$. Từ $(1)$ ta suy ra điểm $A$ thuộc điểm đường tròn $(C)$ có tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 2$.

- $9^{-m}.3^{-n}.3^{\frac{-4}{2m+n}} + \ln\left[\left(2m + n + 2\right)^2 + 1\right] = 81 \Leftrightarrow \ln\left[\left(2m + n + 2\right)^2 + 1\right] = 81 - 3^{-(2m+n) + \frac{-4}{2m+n}} \; (*)$

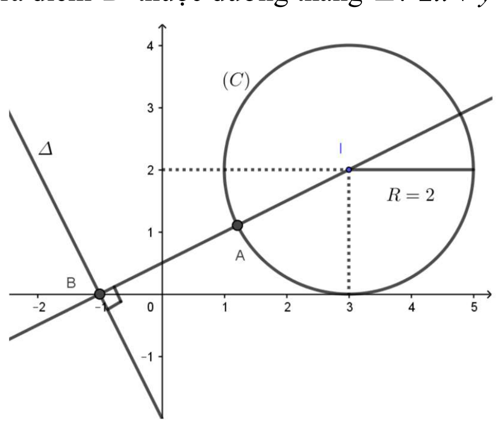
Theo bất đẳng thức Cô-si: $-(2m + n) + \dfrac{-4}{2m + n} \geq 2\sqrt{-(2m + n).\dfrac{-4}{2m + n}} = 4 \Rightarrow 3^{-(2m+n) + \frac{-4}{2m+n}} \geq 81$.

(Đẳng thức xảy ra khi: $-(2m + n) = \dfrac{-4}{2m + n} \Rightarrow 2m + n = -2$)

Từ $(*) \Rightarrow \ln\left[\left(2m + n + 2\right)^2 + 1\right] \leq 0 \Leftrightarrow \left(2m + n + 2\right)^2 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow \left(2m + n + 2\right)^2 \leq 0$

$\Rightarrow 2m + n + 2 = 0 \; (2)$.

Gọi $B(m; n)$. Từ $(2)$ ta suy ra điểm $B$ thuộc đường thẳng $\Delta$: $2x + y + 2 = 0$




Ta có: $P = \sqrt{\left(a - m\right)^2 + \left(b - n\right)^2} = AB$

$\Rightarrow \min P = \min AB = d\left(I;\Delta\right) - R = \dfrac{\left|3.2+2+2\right|}{\sqrt{2^2+1^2}} - 2 = 2\sqrt{5} - 2.$

**Câu 36.** Cho hai số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $4^{ab}.2^{a+b} = \dfrac{8\left(1-ab\right)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2ab^2$ bằng

**A.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{17}$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ giả thiết suy ra $1 - ab > 0$.

$4^{ab}.2^{a+b} = \dfrac{8\left(1-ab\right)}{a+b} \Leftrightarrow \left(a+b\right).2^{a+b} = \dfrac{8\left(1-ab\right)}{2^{2ab}} \Leftrightarrow \left(a+b\right).2^{a+b} = \left(2-2ab\right).2^{2-2ab}$ (1).

Xét hàm số $f\left(t\right) = t.2^t$ với $t \in \left(0;+\infty\right) = D$. Dễ thấy hàm số $f\left(t\right)$ liên tục trên $D$ và $f'\left(t\right) = 2^t + t.2^t.\ln 2 > 0, \forall t \in D$ suy ra $f\left(t\right)$ là hàm số đồng biến trên $D$.

(1) $\Leftrightarrow a + b = 2 - 2ab \Rightarrow a\left(1+2b\right) = 2 - b$ (2). Từ (2), suy ra $2 - b > 0 \Rightarrow b < 2$.

Ta được $P = ab + 2ab^2 = ba\left(1+2b\right) \overset{(2)}{=} b\left(2-b\right)$.

Theo bất đẳng thức Cô – si, ta được $P = b\left(2-b\right) \le \left[\dfrac{b+\left(2-b\right)}{2}\right]^2 = 1$.

Vậy $\max P = 1$, đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases}$.

**Câu 37.** Tìm tập $S$ tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để tồn tại duy nhất cặp số $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

**A.** $S = \left\{-5;5\right\}$. **B.** $S = \left\{-7;-5;-1;1;5;7\right\}$.

**C.** $S = \left\{-1;1\right\}$. **D.** $S = \left\{-5;-1;1;5\right\}$.

**Lời giải.**

**Chọn C**

Ta có

$\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \ge 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \ge x^2+y^2+2 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2 \le 0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 + \left(y-2\right)^2 \le m^2$ là một hình tròn $\left(C_1\right)$ tâm $I\left(2;2\right)$, bán kính $R_1 = \left|m\right|$ với $m \ne 0$ hoặc là điểm $I\left(2;2\right)$ với $m = 0$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 4$ là một đường tròn $\left(C_2\right)$ tâm $J\left(-1;2\right)$, bán kính $R_2 = 2$.

TH1: Với $m = 0$ ta có: $I\left(2;2\right) \notin \left(C_2\right)$ suy ra $m = 0$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.

TH2: Với $m \ne 0$.

Để hệ $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \ge 1 \\ x^2+y^2+2x-4y+1=0 \end{cases}$ tồn tại duy nhất cặp số $\left(x;y\right)$ thì hình tròn $\left(C_1\right)$ và đường tròn $\left(C_2\right)$ tiếp xúc ngoài với nhau $\Leftrightarrow IJ = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{3^2+0^2} = \left|m\right| + 2 \Leftrightarrow \left|m\right| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

**Câu 38.** Cho hai số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $4^{ab}.2^{a+b} = \dfrac{8\left(1-ab\right)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2ab^2$ bằng

**A.** $\dfrac{3}{17}$.    **B.** $3$.    **C.** $1$.    **D.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết suy ra $1-ab>0$.

$4^{ab}.2^{a+b}=\dfrac{8(1-ab)}{a+b}\Leftrightarrow (a+b).2^{a+b}=\dfrac{8(1-ab)}{2^{2ab}}\Leftrightarrow (a+b).2^{a+b}=(2-2ab).2^{2-2ab}$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t\in(0;+\infty)=D$. Dễ thấy hàm số $f(t)$ liên tục trên $D$ và $f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0,\forall t\in D$ suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $D$.

(1) $\Leftrightarrow a+b=2-2ab\Rightarrow a(1+2b)=2-b$ (2). Từ (2), suy ra $2-b>0\Rightarrow b<2$.

Ta được $P=ab+2ab^2=ba(1+2b)\overset{(2)}{=}b(2-b)$.

Theo bất đẳng thức Cô – si, ta được $P=b(2-b)\le\left[\dfrac{b+(2-b)}{2}\right]^2=1$.

Vậy $\max P=1$, đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=1\end{cases}$.

**Câu 39.** **(Thi Thử Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1. 2018-2019)** Cho hàm số $f(x)=-\ln(x^2+x)$. Tính $P=e^{f(1)}+e^{f(2)}+...+e^{f(2019)}$.

**A.** $P=\dfrac{2019}{2020}$.    **B.** $P=e^{2019}$.    **C.** $P=-\dfrac{2019}{2020}$.    **D.** $P=\dfrac{2020}{2019}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định của hàm số: $D=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

Đặt: $g(x)=e^{f(x)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Suy ra $P=g(1)+g(2)+....+g(2019)$.

Ta có: $g(1)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2};g(2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3};....;g(2019)=\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2020}$.

Do đó $P=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+...+\left(\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2020}\right)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2020}=\dfrac{2019}{2020}$.

------------- **HẾT** -------------

**Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(0)=2018$. Giá trị của $f(1)$ là

**A.** $f(1)=2019.e^{-2018}$. **B.** $f(1)=2019.e^{2018}$.

**C.** $f(1)=2018.e^{-2018}$. **D.** $f(1)=2018.e^{2018}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo giả thiết: $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$

$\Leftrightarrow e^{-2018x}.f'(x)-2018.e^{-2018x}.f(x)=2018.x^{2017}$

$\Leftrightarrow \left[e^{-2018x}.f(x)\right]'=\left(x^{2018}\right)'$

$\Leftrightarrow e^{-2018x}.f(x)=x^{2018}+C\ (1)$.

Thay $x=0$ vào $(1)$, ta được $f(0)=C\Leftrightarrow C=2018$.

Do đó, từ $(1)$ suy ra: $f(x)=\left(x^{2018}+2018\right)e^{2018x}$.

Vậy $f(1)=2019.e^{2018}$.

**Câu 2.** **(Sở GD- ĐT Quảng Nam)** Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét trên đoạn $[0;1]$, theo đề bài: $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$

$\Leftrightarrow 2f(x).f'(x)=2x+\left(x^2-1\right).f'(x)+2x.f(x)$

$\Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]'=\left[x^2+\left(x^2-1\right).f(x)\right]'$

$\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right).f(x)+C\ (1)$.

Thay $x=1$ vào $(1)$ ta được: $f^2(1)=1+C\Leftrightarrow C=0$ (vì $f(1)=1$).

Do đó, $(1)$ trở thành: $f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right).f(x)$

$\Leftrightarrow f^2(x)-1=x^2-1+\left(x^2-1\right).f(x)$

$\Leftrightarrow \left[f(x)-1\right].\left[f(x)+1\right]=\left(x^2-1\right).\left[f(x)+1\right]$

$\Leftrightarrow f(x)-1=x^2-1$ (vì $f(x)\geq 0\Rightarrow f(x)+1>0\ \ \forall x\in[0;1]$)

$\Leftrightarrow f(x)=x^2$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$.

**Câu 3.** **(THPT Chuyên Lam Sơn - lần 2- NĂM HỌC 2018 – 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\pi\right]$. Biết $f\left(0\right)=2\text{e}$ và $f\left(x\right)$ thỏa mãn hệ thức $f'\left(x\right)+\sin x.f\left(x\right)=\cos x.\text{e}^{\cos x},\forall x\in\left[0;\pi\right]$. Tính $I=\int\limits_0^\pi f\left(x\right)\text{d}x$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

**A.** $I\approx 10,31$. **B.** $I\approx 16,91$. **C.** $I\approx 6,55$. **D.** $I\approx 17,30$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả thiết $f'\left(x\right)+\sin x.f\left(x\right)=\cos x.\text{e}^{\cos x}\Leftrightarrow \text{e}^{-\cos x}.f'\left(x\right)+\text{e}^{-\cos x}.\sin x.f\left(x\right)=\cos x$

$\Leftrightarrow\left[\text{e}^{-\cos x}.f\left(x\right)\right]'=\cos x\Rightarrow \text{e}^{-\cos x}.f\left(x\right)=\sin x+C_1$ (1).

Do $f\left(0\right)=2\text{e}$, thế vào (1) ta được $C_1=2$ suy ra $f\left(x\right)=\left(2+\sin x\right)\text{e}^{\cos x}$.

Dùng máy tính thì $I=\int\limits_0^\pi f\left(x\right)\text{d}x=\int\limits_0^\pi\left(2+\sin x\right).\text{e}^{\cos x}\text{d}x\approx 10,30532891$.

**Câu 4.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\frac{f(x)}{x^2+x}dx$ bằng:

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{8}{9}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x\Rightarrow\frac{f(x)}{x^2+x}+\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}=x-1$$

$$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\frac{f(x)}{x^2+x}\text{d}x+\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\text{d}x=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3(\text{x}-1)\text{d}x=\frac{16}{9}.$$

Xét $I'=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\text{d}x$.

Đặt $\frac{1}{x}=t\Rightarrow\frac{-1}{x^2}\text{d}x=\text{d}t\Rightarrow\text{d}x=\frac{\text{d}t}{-t^2}$.

$$I'=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\text{d}x=\int\limits_3^{\frac{1}{3}}\frac{f(t)}{\frac{1}{t}+1}\frac{\text{d}t}{-t^2}=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\frac{f(t)}{t^2+t}dt=\int\limits_{\frac{1}{3}}^3\frac{f(x)}{x^2+x}\text{d}x=I.$$

Suy ra $2I=\frac{16}{9}\Rightarrow I=\frac{8}{9}$.

**Câu 5.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $\left[3;7\right]$ và $f\left(x\right)\neq 0$, $\forall x\in\left[3;7\right]$. Biết rằng $\int\limits_3^7\frac{\left[f'\left(x\right)\right]^2}{\left[f\left(x\right)\right]^4}\text{d}x=1$ và $f\left(3\right)=\frac{1}{4}$, $f\left(7\right)=\frac{1}{2}$. Tính $f\left(5\right)$.

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{7}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $\int\limits_3^7 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int\limits_3^7 \frac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{f(x)}\Bigg|_3^7 = -\left(\frac{1}{f(7)} - \frac{1}{f(3)}\right) = -(2-4) = 2$.

Gọi $k$ là một hằng số thực, ta sẽ tìm $k$ thỏa mãn $\int\limits_3^7 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right)\mathrm{d}x = 0$.

Ta có: $\int\limits_3^7 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} + k\right)^2 \mathrm{d}x = \int\limits_3^7 \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^4}\mathrm{d}x + 2k\int\limits_3^7 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x + k^2\int\limits_3^7 \mathrm{d}x = 1 + 4k + 4k^2 = (2k+1)^2$.

Suy ra $k = -\frac{1}{2}$. Khi đó $\int\limits_3^7 \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \int\limits_3^5 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_3^5 \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_3^5 \frac{\mathrm{d}f(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Bigg|_3^5 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f(3)} - \frac{1}{f(5)} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{f(5)} = 1 \Leftrightarrow f(5) = \frac{1}{3}$.

**Câu 6.** **(TRƯỜNG THPT KINH MÔN)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x \quad (1)$. Biết $f(2) = a + b.\ln 3 \quad (a,\ b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $2\left(a^2 + b^2\right)$ là:

**A.** $\frac{27}{4}$. **B.** $9$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét trên đoạn $[1;2]$, chia cả hai vế của phương trình $(1)$ cho $(x+1)^2$, ta được:

$\frac{x}{x+1}\cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2}\cdot f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow \left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]' = \frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow \int \left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]' \mathrm{d}x = \int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1}\cdot f(x) + C_1 = \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1}\cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C \quad (2)$.

Theo giả thiết, $f(1) = -2\ln 2$ nên thay $x = 1$ vào phương trình $(2)$, ta được:

$$\frac{1}{2}f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

Thay $x = 2$ vào $(2)$, ta được:

$$\frac{2}{3}f(2) = 2 - \ln 3 - 1 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3.$$

$\Rightarrow a=\dfrac{3}{2},\ b=-\dfrac{3}{2}$. Vậy $2\left(a^2+b^2\right)=9$.

**Câu 7.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=3$, $\int\limits_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=4$ và $\int\limits_0^2 x^2f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\dfrac{562}{115}$. **B.** $\dfrac{266}{115}$. **C.** $\dfrac{2}{115}$. **D.** $\dfrac{297}{115}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết: $\int\limits_0^2 x^2f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\int\limits_0^2 3x^2f(x)\mathrm{d}x=1$.

Tính: $I=\int\limits_0^2 3x^2f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=3x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=x^3\end{cases}$.

Ta có: $I=\int\limits_0^2 3x^2f(x)\mathrm{d}x=x^3.f(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=24-\int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(2)=3$)

Mà: $I=\int\limits_0^2 3x^2f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow 1=24-\int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=23\Leftrightarrow\dfrac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=4$

$\Leftrightarrow\dfrac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=4$)

$\Leftrightarrow\int\limits_0^2\left[\dfrac{4}{23}x^3.f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f'(x)\left[\dfrac{4}{23}x^3-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow\dfrac{4}{23}x^3-f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{4}{23}x^3\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{23}x^4+C$

Với $f(2)=3\Rightarrow 3=\dfrac{16}{23}+C\Rightarrow C=\dfrac{53}{23}$.

Khi đó: $f(x)=\dfrac{1}{23}x^4+\dfrac{53}{23}$.

Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(\dfrac{1}{23}x^4+\dfrac{53}{23}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{115}x^5+\dfrac{53}{23}x\right)\Bigg|_0^2=\dfrac{562}{115}$.

**Câu 8.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

**A.** $\dfrac{5}{2}$. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo giả thiết, $\forall x\in\mathbb{R}$: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow f'(x).f'(x)+f(x).f''(x)=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]' = 15x^4 + 12x$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x) = \int (15x^4 + 12x)\mathrm{d}x = 3x^5 + 6x^2 + C \ \ (1)$.

Thay $x = 0$ vào $(1)$, ta được: $f(0).f'(0) = C \Leftrightarrow C = 1$.

Khi đó, $(1)$ trở thành: $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x).f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (3x^5 + 6x^2 + 1)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}x^6 + 2x^3 + x\right)\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[f^2(1) - f^2(0)\right] = \frac{7}{2} \Leftrightarrow f^2(1) - 1 = 7 \Leftrightarrow f^2(1) = 8$.

Vậy $f^2(1) = 8$.

**Câu 9.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2) = 6$, $\int_0^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{17}{2}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $8$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tính: $I = \int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ta có: $I = \frac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x \ = 12 - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(2) = 6$).

Theo giả thiết: $\int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{17}{2} \ \Rightarrow \frac{17}{2} = 12 - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = 7$

$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^2 \left(x^2 f'(x) - \left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f'(x).\left[x^2 - f'(x)\right]\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Với $f(2) = 6 \ \Rightarrow \ C = \frac{10}{3}$.

Khi đó: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{3}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{3}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{10}{3}x\right)\Big|_0^2 = 8$.

**Câu 10.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;3\right]$ thỏa mãn $f\left(3\right)=6$, $\int\limits_0^3 \left[f'\left(x\right)\right]^2 \mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^3 x^2.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{154}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\dfrac{13}{5}$. **B.** $\dfrac{53}{5}$. **C.** $\dfrac{117}{20}$. **D.** $\dfrac{153}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tính $I=\int\limits_0^3 x^2.f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=f\left(x\right) \\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$.

Ta có $I=\dfrac{1}{3}x^3.f\left(x\right)\Big|_0^3-\dfrac{1}{3}\int\limits_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x\; =54-\dfrac{1}{3}\int\limits_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, (vì $f\left(3\right)=6$).

Theo giả thiết: $\int\limits_0^3 x^2.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{154}{3}\Rightarrow\dfrac{154}{3}=54-\dfrac{1}{3}\int\limits_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int\limits_0^3 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x=4\int\limits_0^3\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^3\left(x^3f'\left(x\right)-4\left[f'\left(x\right)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^3 f'\left(x\right)\left[x^3-4f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow x^3-4f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{x^3}{4}\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{x^4}{16}+C$.

Với $f\left(3\right)=6\Rightarrow C=\dfrac{15}{16}$.

Khi đó: $f\left(x\right)=\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{15}{16}$.

Vậy $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left(\dfrac{1}{16}x^4+\dfrac{15}{16}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{80}x^5+\dfrac{15}{16}x\right)\Bigg|_0^3=\dfrac{117}{20}$.

**Câu 11.** **(SGD Nam Định_Lần 1_2018-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các tiếp tuyến với đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x=-1$; $x=0$; $x=1$ lần lượt tạo với chiều dương trục $Ox$ các góc $30^\circ$, $45^\circ$, $60^\circ$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^0 f'\left(x\right).f''\left(x\right)\mathrm{d}x+4\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^3.f''\left(x\right)\mathrm{d}x$?

**A.** $I=\dfrac{1}{3}$. **B.** $I=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1$. **C.** $I=\dfrac{25}{3}$. **D.** $I=0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ là

$f'\left(-1\right)=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x=0$ là

$f'\left(0\right)=\tan 45^\circ=1$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

$f'(1)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

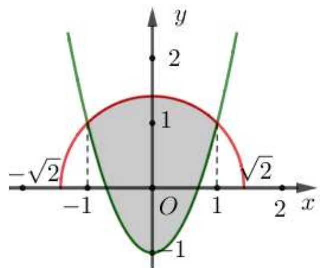
Ta có

$$I=\int_{-1}^{0} f'(x).f''(x)\mathrm{d}x+4\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^3.f''(x)dx=\left.\frac{\left[f'(x)\right]^2}{2}\right|_{-1}^{0}+\left.\left[f'(x)\right]^4\right|_{0}^{1}$$

$$=\frac{\left[f'(0)\right]^2}{2}-\frac{\left[f'(-1)\right]^2}{2}+\left[f'(1)\right]^4-\left[f'(0)\right]^4=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+9-1=\frac{25}{3}.$$

**Câu 12.** Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu theo hình giới hạn bởi một đường Parabol và nửa đường tròn có bán kính $\sqrt{2}$ mét (phần tô trong hình vẽ). Biết rằng: để trồng mỗi $m^2$ hoa cần ít nhất là $250000$ đồng, số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu gần bằng

**A.** $809000$ đồng. **B.** $559000$ đồng. **C.** $893000$ đồng. **D.** $476000$ đồng.




**Lời giải**

**Chọn A**

Nửa đường tròn $(T)$ có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$.

Xét parabol $(P)$ có trục đối xứng $Oy$ nên có phương trình dạng: $y=ax^2+c$.

$(P)$ cắt $Oy$ tại điểm $(0;-1)$ nên ta có: $c=-1$.

$(P)$ cắt $(T)$ tại điểm $(1;1)$ thuộc $(T)$ nên ta được: $a+c=1\Rightarrow a=2$.

Phương trình của $(P)$ là: $y=2x^2-1$.

Diện tích miền phẳng $D$ (tô màu trong hình) là:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}dx+\int_{-1}^{1}\left(-2x^2+1\right)dx.$$

$$I_1=\int_{-1}^{1}\left(-2x^2+1\right)dx=\left.\left(-\frac{2}{3}x^3+x\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

Xét $I_2=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}dx$, đặt $x=\sqrt{2}\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$

Đổi cận: $x=-1$ thì $t=-\frac{\pi}{4}$, với $x=1$ thì $t=\frac{\pi}{4}$, ta được:

$$I_2=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{2-2\sin^2 t}\sqrt{2}\cos t dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}2\cos^2 t dt$$

$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)dt=\left.\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_{-\pi/4}^{\pi/4}=1+\frac{\pi}{2}$$

Suy ra $S=I_1+I_2=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\left(m^2\right)$.

Số tiền trồng hoa tối thiểu là: $250000\left(\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\approx 809365$ đồng.

**Câu 13.** **(Sở GD- ĐT Quảng Nam)** Cho hai số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y}$ bằng

**A.** $\dfrac{e}{2\ln 2}$. **B.** $\dfrac{e+\ln 2}{2}$. **C.** $\dfrac{e-\ln 2}{2}$. **D.** $\dfrac{e\ln 2}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo đề bài, $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2^y+\log_2\left(2^y\right)=2x+\log_2\left(x+\dfrac{2^y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2^y+2^y+\log_2\left(2^y\right)=2x+2^y+\log_2\left(\dfrac{2x+2^y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2.\left(2^y\right)+\log_2\left(2^y\right)=2\cdot\left(\dfrac{2x+2^y}{2}\right)+\log_2\left(\dfrac{2x+2^y}{2}\right)\left(1\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=2t+\log_2 t$, $t>0$.

Vì $f'\left(t\right)=2+\dfrac{1}{t\ln 2}>0\ \ \forall t>0\Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

nên $\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(2^y\right)=f\left(\dfrac{2x+2^y}{2}\right)\Leftrightarrow 2^y=\dfrac{2x+2^y}{2}\Leftrightarrow 2.2^y=2x+2^y\Leftrightarrow 2x=2^y\Leftrightarrow x=2^{y-1}$.

$\Rightarrow P=\dfrac{x}{y}=\dfrac{2^{y-1}}{y}=g\left(y\right)$, $y>0$.

$g'\left(y\right)=\dfrac{2^{y-1}.\ln 2.y-2^{y-1}}{y^2}=\dfrac{2^{y-1}.\left(y\ln 2-1\right)}{y^2}$. Cho $g'\left(y\right)=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\ln 2}=\log_2 e$.

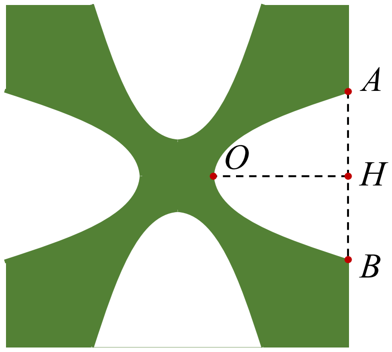
Bảng biến thiên của $g\left(y\right)$:

| $y$ | $0$ | | $\log_2 e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(y)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(y)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $\dfrac{e\ln 2}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} g\left(y\right)=g\left(\log_2 e\right)=\dfrac{e}{2\log_2 e}=\dfrac{e\ln 2}{2}$.

Vậy $\min P=\dfrac{e\ln 2}{2}$.

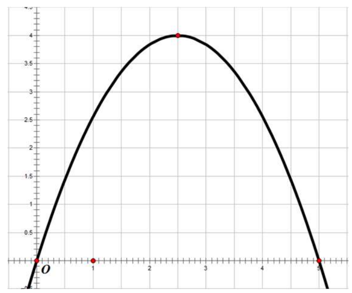
**Câu 14.** Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng $10$ cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5\,\text{cm}$, $OH=4\,\text{cm}$. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.




**A.** $\frac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\text{ cm}^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**



Đưa parabol $(P): y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ vào hệ trục $Oxy$.

Parabol đi qua gốc tọa độ và các điểm $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$, $(5;0)$ (do $AB = 5\,\text{cm}$, $OH = 4\,\text{cm}$).

Suy ra $\begin{cases} c = 0 \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 4 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{16}{25} \\ c = 0 \\ b = \frac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x\right)\text{d}x = \frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi là $S_1 = 4S = \frac{160}{3}\text{cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là $S_{hv} = 100\text{cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3}\text{cm}^2$.

**Câu 15.** Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right).\text{e}^{x+\frac{1}{x}}\text{d}x = \frac{a}{b}.\text{e}^{\frac{c}{d}}$ trong đó $a$, $b$, $c$, $d$ là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc - ad$.

**A.** $1$. **B.** $24$. **C.** $64$. **D.** $12$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\left(x.e^{x+\frac{1}{x}}\right)' = e^{x+\frac{1}{x}} + x.\left(1-\frac{1}{x^2}\right).e^{x+\frac{1}{x}} = \left(1+x-\frac{1}{x}\right).e^{x+\frac{1}{x}}$ với mọi $x \in \left[\frac{1}{12};12\right]$.

Do đó $\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right).e^{x+\frac{1}{x}}dx = \left(x.e^{x+\frac{1}{x}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{12}}^{12} = 12.e^{12+\frac{1}{12}} - \frac{1}{12}.e^{12+\frac{1}{12}} = \frac{143}{12}.e^{\frac{145}{12}}$.

Từ đó ta được $a=143$, $b=12$, $c=145$ và $d=12$. Vậy $bc-ad=24$.

**Câu 16.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}dx$ bằng:

**A.** $\frac{8}{9}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2+x}+\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}=x-1$

$\Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}dx+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}dx=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}(x-1)dx=\frac{16}{9}$.

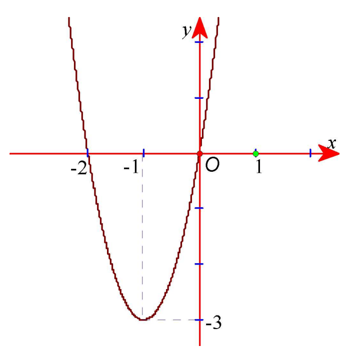
Xét $I'=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}dx$.

Đặt $\frac{1}{x}=t \Rightarrow \frac{-1}{x^2}dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{-t^2}$.

$I'=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}dx=\int\limits_{3}^{\frac{1}{3}}\frac{f(t)}{\frac{1}{t}+1}\frac{dt}{-t^2}=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(t)}{t^2+t}dt=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}dx=I$.

Suy ra $2I=\frac{16}{9}\Rightarrow I=\frac{8}{9}$.

**Câu 17.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm là hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?

**A.** $-4$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra $y=f'(x)$ là một Parabol có đỉnh $I(-1;-3)$ và đi qua các điểm $O(0;0),(-2;0)$. Suy ra $f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow f(x)=\int(3x^2+6x)dx=x^3+3x^2+C$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3+3x^2+C$ tiếp xúc với trục hoành $y=0$ tại điểm có hoành độ âm $\Rightarrow$

Hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3x^2+C=0 \\ 3x^2+6x=0 \end{cases}$ có nghiệm âm.

Hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3x^2+C=0 \\ 3x^2+6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-x^3-3x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ C=-4 \end{cases}$.

Vậy hàm số $y=f(x)=x^3+3x^2-4$.

Tìm giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3+3x^2-4$ với trục $Oy: x=0$ suy ra $y=-4$.

**Câu 18.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

**A.** $20$. **B.** $15$. **C.** $5$. **D.** $10$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$f(x)-xf'(x)=-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow \dfrac{1.f(x)-x.f'(x)}{x^2}=\dfrac{-2x^3-3x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=2x+3$

Suy ra, $\dfrac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2x+3$.

Ta có $\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$. Do đó $\dfrac{f(x)}{x}=x^2+3x+C_1$ $(1)$.

Vì $f(1)=4$ theo giả thiết, nên thay $x=1$ vào hai vế của $(1)$ ta thu được $C_1=0$, từ đó $f(x)=x^3+3x^2$. Vậy $f(2)=20$.

**Câu 19.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x.\ln\left(\dfrac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $I=\int_1^5 f(x)dx$.

**A.** $12\ln13+13$. **B.** $13\ln13+12$. **C.** $12\ln13-13$. **D.** $13\ln13-12$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ giả thiết và $f(x)=x.\ln\left(\dfrac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=\ln\dfrac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}$

$\Leftrightarrow e^{\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{x^3}{x.f'(x)-f(x)} \Leftrightarrow \dfrac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}.e^{\frac{f(x)}{x}}=x \Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'.e^{\frac{f(x)}{x}}=x$ $(1)$

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) suy ra $e^{\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{x^2}{2}+C$.

Do $f(1)=0 \Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$, nên $e^{\frac{f(x)}{x}}=\dfrac{x^2+1}{2} \Rightarrow f(x)=x\ln\dfrac{x^2+1}{2}$ với $x\in(0;+\infty)$.

$I=\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^5 x.\ln\dfrac{x^2+1}{2}\mathrm{d}x$ (2).

Đặt $u=\ln\dfrac{x^2+1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$, chọn $v=\dfrac{x^2+1}{2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$I=\left(\dfrac{x^2+1}{2}.\ln\dfrac{x^2+1}{2}\right)\Bigg|_1^5-\int\limits_1^5 x\mathrm{d}x=13\ln 13-\dfrac{x^2}{2}\Bigg|_1^5=13\ln 13-12$.

**Câu 20.** Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\max\limits_{[1;3]} f(x)=2$, $\min\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{1}{3}$ và biểu thức $S=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_1^3\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $\int\limits_0^8\dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\dfrac{7}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{6}$. **D.** $\dfrac{14}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\dfrac{1}{3}\le f(x)\le 2 \Rightarrow (3f(x)-1)(f(x)-2)\le 0$

$\Rightarrow 3f(x)+\dfrac{2}{f(x)}\le 7 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{f(x)}\le\dfrac{7-3f(x)}{2}$.

Suy ra

$S\le\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_1^3\dfrac{7-3f(x)}{2}\mathrm{d}x\le\dfrac{2}{3}\int\limits_1^3\dfrac{3}{2}f(x)\mathrm{d}x.\left(7-\int\limits_1^3\dfrac{3f(x)}{2}\mathrm{d}x\right)$

$\le\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\int\limits_1^3\dfrac{3}{2}f(x)\mathrm{d}x+7-\int\limits_1^3\dfrac{3f(x)}{2}\mathrm{d}x}{2}\right)^2=\dfrac{49}{6}$.

Ta tìm được $\max S=\dfrac{49}{6}$, xảy ra khi $\int\limits_1^3\dfrac{3f(x)}{2}\mathrm{d}x=7-\int\limits_1^3\dfrac{3f(x)}{2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{3}$.

Vậy $\int\limits_0^8\dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=2\int\limits_0^8 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=2\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{14}{3}$.

<u>Ghi chú</u>: đây là lời giải dựa theo hướng dẫn giải của trường PTTH Quảng Xương. Tuy nhiên chỗ dấu bằng xảy ra chưa chỉ ra được hàm số nào thỏa.

**Câu 21.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=e^x f(x)$ với $f(x)\ne 0,\forall x$ và $f(0)=1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng

**A.** $e^{e+1}$. **B.** $e+1$. **C.** $e^{e-2}$. **D.** $e-1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết: $f'(x)+2x.f(x)=e^x f(x)$, ta có

$f'(x)=f(x)(e^x-2x)$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=e^x-2x$ ( vì $f(x)\neq 0,\forall x$ )

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int (e^x-2x)dx$

$\Rightarrow \ln|f(x)|=e^x-x^2+C$.

Mà $f(0)=1$ nên $C=-1$.

Khi đó, ta được: $\ln|f(x)|=e^x-x^2-1$.

Thế $x=1$, ta có: $\ln|f(1)|=e-2\Rightarrow |f(1)|=e^{e-2}$.

**Câu 22.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=5$ và $\displaystyle\int_0^1 x.f(x)dx=-\frac{1}{2}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\dfrac{15}{19}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{17}{18}$. **D.** $\dfrac{15}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tính: $I=\displaystyle\int_0^1 x.f(x)dx$. Đặt: $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ta có: $I=\dfrac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^2 f'(x)dx \; =2-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$, (vì $f(1)=4$).

Mà: $\displaystyle\int_0^1 x.f(x)dx=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 x^2 f'(x)dx=5$, (theo giả thiết: $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=5$) $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 x^2 f'(x)dx=\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 \left(x^2 f'(x)-[f'(x)]^2\right)dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x).\left[x^2-f'(x)\right]dx=0$

$\Rightarrow x^2-f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C$.

Với $f(1)=4 \Rightarrow C=\dfrac{11}{3}$.

Khi đó: $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{11}{3}$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}\right)dx=\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{11}{3}x\right)\Big|_0^1=\frac{15}{4}$.

**Câu 23.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=36$ và $\displaystyle\int_0^1 x.f(x)dx=\frac{1}{5}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết: $\int\limits_0^1 x.f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\Rightarrow\int\limits_0^1 5x.f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

Tính: $I=\int\limits_0^1 5x.f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=5x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{5}{2}x^2\end{cases}$.

Ta có: $I=\int\limits_0^1 5x.f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x$

$=\frac{5}{2}.f(1)-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x=10-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x$, (vì $f(1)=4$)

Mà: $I=\int\limits_0^1 5x.f(x)\,\mathrm{d}x=1\Rightarrow 1=10-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^1 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{18}{5}$

$\Leftrightarrow 10\int\limits_0^1 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x=36\Leftrightarrow 10\int\limits_0^1 x^2.f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=36$)

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[10x^2.f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f'(x)\left[10x^2-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 10x^2-f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=10x^2\Rightarrow f(x)=\frac{10x^3}{3}+C$

Với $f(1)=4\Rightarrow 4=\frac{10.1}{3}+C\Rightarrow C=\frac{2}{3}$.

Khi đó: $f(x)=\frac{10x^3}{3}+\frac{2}{3}$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\frac{10x^3}{3}+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{5x^4}{6}+\frac{2}{3}x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$.

**Câu 24.** Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\max\limits_{[1;3]}f(x)=2$, $\min\limits_{[1;3]}f(x)=\frac{1}{3}$ và biểu thức $S=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_1^3\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $\int\limits_0^8\frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{7}{6}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{7}{12}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\frac{1}{3}\le f(x)\le 2\Rightarrow\left(3f(x)-1\right)\left(f(x)-2\right)\le 0$

$\Rightarrow 3f(x)+\frac{2}{f(x)}\le 7\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{f(x)}\le\frac{7-3f(x)}{2}$.

Suy ra

$S\le\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_1^3\frac{7-3f(x)}{2}\mathrm{d}x\le\frac{2}{3}\int\limits_1^3\frac{3}{2}f(x)\mathrm{d}x.\left(7-\int\limits_1^3\frac{3f(x)}{2}\mathrm{d}x\right)$

$$\le \frac{2}{3}\left(\frac{\int\limits_1^3 \frac{3}{2}f(x)\,\mathrm{d}x+7-\int\limits_1^3 \frac{3f(x)}{2}\mathrm{d}x}{2}\right)^2=\frac{49}{6}.$$

Ta tìm được $\max S=\frac{49}{6}$, xảy ra khi $\int\limits_1^3 \frac{3f(x)}{2}\mathrm{d}x=7-\int\limits_1^3 \frac{3f(x)}{2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{3}$.

Vậy $\int\limits_0^8 \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=2\int\limits_0^8 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right)=2\int\limits_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{14}{3}$.

Ghi chú: đây là lời giải dựa theo hướng dẫn giải của trường PTTH Quảng Xương. Tuy nhiên chỗ dấu bằng xảy ra chưa chỉ ra được hàm số nào thỏa.

**Câu 25.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa điều kiện $f(x)+2.f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\ \forall x\in\mathbb{R}^*$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$.

**A.** $I=4\ln 2-\frac{15}{8}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=4\ln 2+\frac{15}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét $x\in\mathbb{R}^*$, ta có

$$f(x)+2.f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \quad (1).$$

Thay $x$ bằng $\frac{1}{x}$ ta được

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2.f(x)=\frac{3}{x} \quad (2).$$

Nhân hai vế đẳng thức $(2)$ cho 2 rồi trừ cho đẳng thức $(1)$ vế theo vế ta có

$$3f(x)=\frac{6}{x}-3x\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{x^2}-1.$$

Suy ra

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left.-\frac{2}{x}-x\right|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}.$$

**Câu 26.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 1$, $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx$.

**A.** $I = 1$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 1 = J$

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2\sin x.\cos x.dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1;\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}dt = 1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}dt = 2$

Mặt khác $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx = 1$

Đặt $t = \ln^2 x \Rightarrow dt = 2\ln x.\frac{1}{x}.dx$

Đổi cận $x = e \Rightarrow t = 1;\ x = e^2 \Rightarrow t = 4$

$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(t)}{t}dt = 1 \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t}dt = 2$

$I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx = 2\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{2x}dx$

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2.dx$

Đổi cận $x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2};\ x = 2 \Rightarrow t = 4$

$I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(t)}{t}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t}dt = 4$

**Câu 27.** **(Thi Thử Cẩm Bình Cẩm Xuyên Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x) = x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x) - f(x)}\right)$ và $f(1) = 0$. Tính tích phân $I = \int_1^5 f(x)dx$.

**A.** $13\ln 13 - 12$. **B.** $12\ln 13 + 13$. **C.** $13\ln 13 + 12$. **D.** $12\ln 13 - 13$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết và $f(x) = x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x) - f(x)}\right) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln\frac{x^3}{x.f'(x) - f(x)}$

$\Leftrightarrow e^{\frac{f(x)}{x}} = \frac{x^3}{x.f'(x) - f(x)} \Leftrightarrow \frac{x.f'(x) - f(x)}{x^2}.e^{\frac{f(x)}{x}} = x \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'.e^{\frac{f(x)}{x}} = x$ (1)

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) suy ra $e^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^2}{2}+C$.

Do $f(1)=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$, nên $e^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow f(x)=x\ln\frac{x^2+1}{2}$ với $x\in(0;+\infty)$.

$I=\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^5 x.\ln\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{d}x$ (2).

Đặt $u=\ln\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$, chọn $v=\frac{x^2+1}{2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$I=\left(\frac{x^2+1}{2}.\ln\frac{x^2+1}{2}\right)\Bigg|_1^5-\int\limits_1^5 x\mathrm{d}x=13\ln 13-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^5=13\ln 13-12$.

**Câu 28.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 f'(x)cos(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

**A.** $\frac{1}{\pi}$ **B.** $\pi$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $I_1=\int\limits_0^1 f'(x)cos(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$.

Đặt $u=\cos(\pi x)\Rightarrow du=-\pi\sin(\pi x)$, $dv=f'(x)dx$ chọn $v=f(x)$.

$\Rightarrow I_1=f(x)\cos(\pi x)\Big|_0^1+\int\limits_0^1 \pi f(x)\sin(\pi x)dx=-f(1)-f(0)+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)sin(\pi x)dx=\frac{1}{2}$.

Ta có $I_2=\int\limits_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}\Rightarrow I_1=I_2\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\int\limits_0^1 f^2(x)dx$.

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[f^2(x)-f(x)\sin(\pi x)\right]dx=0\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)\sin(\pi x)=0\Leftrightarrow f(x)\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]=0$.

$\Leftrightarrow f(x)=0$ hoặc $f(x)-\sin(\pi x)=0$. Vì $I_1\neq 0$ và $I_2\neq 0$ nên $f(x)=0$ loại.

$\Leftrightarrow f(x)-\sin(\pi x)=0\Leftrightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 \sin(\pi x)dx=-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$.

**Câu 29.** **(Chuyên Nguyễn Trãi-Hải Dương 18-19)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int\limits_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

**A.** $\dfrac{2}{3}$.　　**B.** $2$.　　**C.** $0$.　　**D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$

$\Rightarrow \int\left[f(x).f'(x)+18x^2\right]dx=\int\left[(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)\right]dx$

$\Rightarrow \int\left[\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3\right]'dx=\int\left[(3x^2+x)f(x)\right]'dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)+C$, với $C$ là hằng số.

Mặt khác: theo giả thiết $f(0)=0$ nên $C=0$.

Khi đó $\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)(1),\forall x\in\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow f^2(x)+12x^3=(6x^2+2x)f(x)\Leftrightarrow\left[f(x)-2x\right]\left[f(x)-6x^2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2x\\f(x)=6x^2\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $f(x)=6x^2,\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f'(0)=0$ (loại).

Trường hợp 2: Với $f(x)=2x,\forall x\in\mathbb{R}$, ta có :

$\int_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=\int_0^1(x+1)e^{2x}dx=\left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow a-b=1$.

**Câu 30.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Tìm số thực $a$ để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\dfrac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\dfrac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích lớn nhất.

**A.** 2.　　**B.** $\sqrt[3]{3}$.　　**C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.　　**D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}=\frac{a^2-ax}{1+a^6}\Leftrightarrow x^2+3ax+2a^2=0\Leftrightarrow(x+a)(x+2a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-a\\x=-2a\end{array}\right.$

□□Nếu $a=0$ thì diện tích hình phẳng $S=0$.

+ Nếu $a>0$ thì $S=\int_{-2a}^{-a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|dx=-\int_{-2a}^{-a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}dx=\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

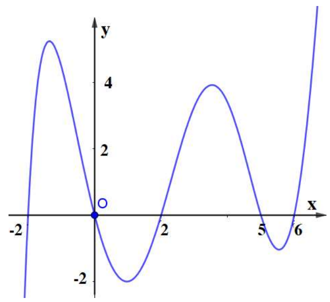
+ Nếu $a<0$ thì $S=\int_{-a}^{-2a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|dx=-\int_{-a}^{-2a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}dx=-\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

Do đó, với $a\neq0$ thì $S=\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{1+|a|^6}\le\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{2|a|^3}=\frac{1}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|a|^3 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm đã cho có diện tích lớn nhất khi $a = 1$.

**Câu 31.** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Số nghiệm của phương trình $f(x) = f(0)$ thuộc đoạn $[-1;5]$ là




**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Dựa vào độ thị của $f'(x)$ ta có bảng biến thiên cho hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $h(x)$ | | ↗ | $f(0)$ | ↘ | | ↗ | $f(5)$ |

Xét $S = \int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x + \int_2^5 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^2 + f(x)\Big|_2^5 = f(5) - f(0)$.

Vì $S > 0$ nên $f(5) > f(0)$.

Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[-1;5]$.

------------- **HẾT** -------------

**Câu 32.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 2$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 8$ và $\int_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x = 10$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{116}{57}$. **B.** $\frac{584}{285}$. **C.** $-\frac{2}{285}$. **D.** $\frac{194}{95}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tính: $I = \int_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^3\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{4}x^4 \end{cases}$.

Ta có: $I = \frac{1}{4}x^4.f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(1) = 2$).

Theo giả thiết: $\int\limits_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x=10 \Rightarrow \int\limits_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x=-38$

$\Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x=-38.8 \Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x=-38.\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left(8x^4 f'(x)+38\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f'(x).\left[8x^4+38f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow\ 8x^4+38f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ f'(x)=-\dfrac{4}{19}x^4\ \Rightarrow\ f(x)=-\dfrac{4}{95}x^5+C$.

Với $f(1)=2\ \Rightarrow\ C=\dfrac{194}{95}$.

Khi đó: $f(x)=-\dfrac{4}{95}x^5+\dfrac{194}{95}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{4}{95}x^5+\dfrac{194}{95}\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{2}{285}x^6+\dfrac{194}{95}x\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{116}{57}$.

**Câu 33.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+2f'(-x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với mọi số thực $x$. Giả sử $f(2)=m$, $f(-3)=n$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-2)-f(3)$.

**A.** $T=m+n$. **B.** $T=n-m$. **C.** $T=m-n$. **D.** $T=-m-n$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Với mọi số thực $x$, thay $x$ bởi $-x$ vào biểu thức $f'(x)+2f'(-x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (1), ta được

$f'(-x)+2f'(x)=\dfrac{2|-x|}{(-x)^6+(-x)^2+1}$ hay $2f'(x)+f'(-x)=\dfrac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (2).

Nhân hai vế của (2) với 2 sau đó trừ theo vế cho (1), rút gọn suy ra $f'(x)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{|x|}{x^6+x^2+1}$ với mọi số thực $x$.

Xét $I=\int\limits_{-3}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{2}\dfrac{2}{3}.\dfrac{|x|}{x^6+x^2+1}\mathrm{d}x$. Đặt $u=-x$, khi đó ta được $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Khi $x=-3\Rightarrow u=3$ và $x=2\Rightarrow u=-2$.

Ta được

$$I=\int\limits_{3}^{-2}\dfrac{2}{3}.\dfrac{|-u|}{(-u)^6+(-u)^2+1}(-\mathrm{d}u)=\int\limits_{-2}^{3}\dfrac{2}{3}.\dfrac{|u|}{u^6+u^2+1}\mathrm{d}u=\int\limits_{-2}^{3}\dfrac{2}{3}.\dfrac{|x|}{x^6+x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x.$$

Mà $I=\int\limits_{-3}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=f(2)-f(-3)$ (3) và $I=\int\limits_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(-2)$ (4).

Từ (3) và (4), ta được $f(2)-f(-3)=f(3)-f(-2)$ suy ra

$f(-2)-f(3)=f(-3)-f(2)=n-m$.

------------- **HẾT** -------------

**Câu 1.** Cho số phức $z=a+bi$ với $a,b$ là hai số thực thỏa mãn $a-2b=1$. Tính $|z|$ khi biểu thức $|z+1+4i|+|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\sqrt{\frac{1}{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $a-2b=1 \Leftrightarrow a=2b+1.(*)$

Ta có: $T=|z+1+4i|+|z-2-5i|=\sqrt{(a+1)^2+(b+4)^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b-5)^2}$

$\overset{(*)}{=}\sqrt{(2b+2)^2+(b+4)^2}+\sqrt{(2b-1)^2+(b-5)^2}=\sqrt{5b^2+16b+20}+\sqrt{5b^2-14b+26}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}b+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2}+\sqrt{\left(-\sqrt{5}b+\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2}$

$\geq\sqrt{\left(\sqrt{5}b+\frac{8}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}b+\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{5}}+\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{45+45}=3\sqrt{10}$.

$T_{\min}=3\sqrt{10}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{9}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}b+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)=\frac{6}{\sqrt{5}}\left(-\sqrt{5}b+\frac{7}{\sqrt{5}}\right)\\ \left(\sqrt{5}b+\frac{8}{\sqrt{5}}\right).\left(-\sqrt{5}b+\frac{7}{\sqrt{5}}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow 15b+24=-10b+14\Leftrightarrow b=-\frac{2}{5}$

$\Rightarrow a=-\frac{4}{5}+1=\frac{1}{5}\Rightarrow|z|=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{5}}$.

**Cách 2:** Gọi $M$ là điểm biểu diễn số phức $z$, ta có $M\in\Delta: x-2y-1=0$, $A(-1;-4),B(2;5)$.

Ta có: $[-1-2.(-4)-1].[2-2.5-1]<0\Rightarrow A,B$ nằm khác phía đối với đường thẳng $\Delta: x-2y-1=0$.

$T=|z+1+4i|+|z-2-5i|=MA+MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M=AB\cap\Delta$.

Ta có: phương trình đường thẳng $AB: 3x-y-1=0\Rightarrow M\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\Rightarrow|z|=\sqrt{\frac{1}{5}}$ .

**Câu 2.** Cho $z$ là số phức thỏa mãn $|\bar{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

**A.** $\sqrt{29}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{13}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|\bar{z}|=|z+2i|\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b+2)^2}\Leftrightarrow 4b+4=0\Leftrightarrow b=-1$

$\Rightarrow z=a-i$.

Xét: $|z-1+2i|+|z+1+3i|=|a-1+i|+|a+1+2i|=\sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2}$.

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$\sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2}\geq\sqrt{(1-a+1+a)^2+(1+2)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Suy ra: $\left|z-1+2i\right|+\left|z+1+3i\right|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2\left(1-a\right)=1+a \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$.

**Nhận xét :** Bài toán trên có thể được giải quyết bằng cách đưa về bài toán hình học phẳng.

**Câu 3.** **(Sở GD- ĐT Quảng Nam)** Cho số phức $z=x+y.i\left(x,\ y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z-2+i\right|=\left|z+2+5i\right|$ và biểu thức

$H=\dfrac{x^2+y^2-3y+1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+2x-2y+2\right)\left(x^2+y^2-2x-4y+5\right)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $2x+y$ bằng

**A.** $-6-\sqrt{5}$. **B.** $-6$. **C.** $-6+\sqrt{5}$. **D.** $-3-\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

***Cách 1***

Ta có: $\left|z-2+i\right|=\left|z+2+5i\right| \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=\left(x+2\right)^2+\left(y+5\right)^2$

$\Leftrightarrow x+y+3=0$

Vậy nếu gọi $M\left(z\right)$ thì $M$ thuộc đường thẳng $d: x+y+3=0$.

Suy ra: $x=-3-y$

Ta có $H=\dfrac{x^2-1+y^2-3y+2}{\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2}\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2}}=\dfrac{2y^2+3y+10}{\sqrt{\left(2y^2+2y+5\right)\left(2y^2+4y+20\right)}}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{2}H=\dfrac{2y^2+3y+10}{\sqrt{\left(2y^2+2y+5\right)\left(y^2+2y+10\right)}}$

Mặt khác:

$\sqrt{\left(2y^2+2y+5\right)\left(y^2+2y+10\right)}\le\dfrac{\left(2y^2+2y+5\right)+\left(y^2+2y+10\right)}{2}=\dfrac{3y^2+4y+15}{2}$

Suy ra: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}H\ge\dfrac{2y^2+3y+10}{3y^2+4y+15}$.

Xét hàm số: $f\left(y\right)=\dfrac{2y^2+3y+10}{3y^2+4y+15}$

Ta có: $f'\left(y\right)=\dfrac{\left(4y+3\right)\left(3y^2+4y+15\right)-\left(2y^2+3y+10\right)\left(6y+4\right)}{\left(3y^2+4y+15\right)^2}=\dfrac{5-y^2}{\left(3y^2+4y+15\right)^2}$

$f'\left(y\right)=0\Leftrightarrow 5-y^2=0\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{5}$

Bảng biến thiên:

| $y$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{5}$ | | $\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(y)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(y)$ | $\dfrac{2}{3}$ | $\searrow$ | $\dfrac{54-\sqrt{5}}{82}$ | $\nearrow$ | $\dfrac{54+\sqrt{5}}{82}$ | $\searrow$ | $\dfrac{2}{3}$ |

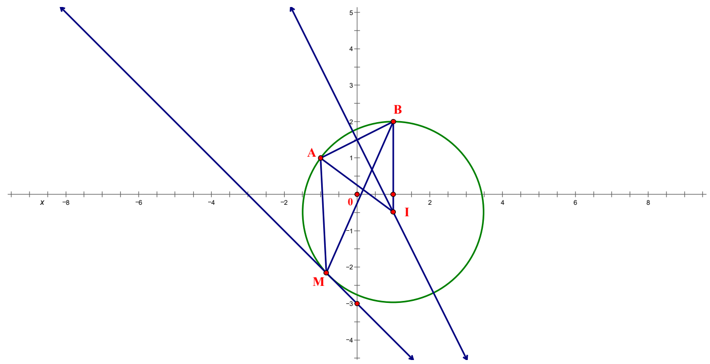
Từ bảng biến thiên suy ra:

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}H\ge\dfrac{54-\sqrt{5}}{82}\Leftrightarrow H\ge\dfrac{54\sqrt{2}-\sqrt{10}}{82}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}2y^2+2y+5=y^2+2y+10\\ y=-\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=5\\ y=-\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow y=-\sqrt{5}$

Với $y=-\sqrt{5}\Rightarrow x=-3+\sqrt{5}\Rightarrow 2x+y=-6+\sqrt{5}$.

***Cách 2***




Ta có $|z-2+i|=|z+2+5i|\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y+5)^2\Leftrightarrow x+y+3=0.$

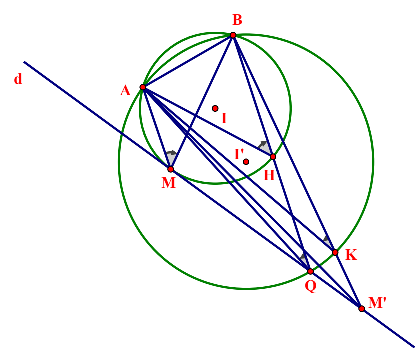
Gọi $M(x;y)\in d: x+y+3=0.$

Khi đó $H=\dfrac{(x+1)(x-1)+(y-1)(y-2)}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}.\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ với $A(-1;1)$, $B(1;2)$.

Do $y=-x-3$ nên $(x+1)(x-1)+(y-1)(y-2)=2x^2+9x+19>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Suy ra $H=\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)>0\Rightarrow\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\in\left[0^0;90^0\right)$.

Bài toán trở thành tìm $M\in d$ sao cho $H_{Min}\Leftrightarrow\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)_{Min}\Leftrightarrow\widehat{AMB}_{Max}$.




Gọi $I$ là tâm đường tròn qua $A,B$ và tiếp xúc với $d$ tại $M$.

$I'$ là tâm đường tròn qua $A,B$ và cắt $d$ tại $Q$, $H$ là giao điểm của $(I)$ với $BQ$.

$M'\in d$ và nằm ngoài đường tròn $(I')$, $K$ là giao điểm của $(I')$ với $BM'$.

Ta có $\widehat{AM'B}<\widehat{AKB}=\widehat{AQB}<\widehat{AHB}=\widehat{AMB}.$

Do đó $\widehat{AMB}_{Max}\Leftrightarrow M$ là tiếp điểm của đường tròn qua $I$ tiếp xúc với $d$.

Phương trình đường thẳng trung trực của $AB$ là $4x+2y-3=0.$

Gọi $I\left(t;-2t+\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow IA=\sqrt{(t+1)^2+\left(2t-\dfrac{1}{2}\right)^2}$; $d(I,d)=\dfrac{\left|t-2t+\dfrac{3}{2}+3\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}$.

Do đường tròn cần tìm đi qua $A$ và tiếp xúc $d$ nên

$$IA=d(I,d)\Leftrightarrow\sqrt{(t+1)^2+\left(2t-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\left|t-2t+\frac{3}{2}+3\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}\Leftrightarrow 9t^2+9t-\frac{71}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{-3+4\sqrt{5}}{6}\\ t=\frac{-3-4\sqrt{5}}{6}\end{array}\right.$$

Với $t=\frac{-3-4\sqrt{5}}{6}\Rightarrow I\left(\frac{-3-4\sqrt{5}}{6};\frac{15+8\sqrt{5}}{6}\right)$

Đường thẳng $IM: x-y+3+2\sqrt{5}=0$ .

Tọa độ điểm $M$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x+y=-3\\ x-y=-3-2\sqrt{5}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3-\sqrt{5}\\ y=\sqrt{5}\end{cases}$$

Vậy $M\left(-3-\sqrt{5};\sqrt{5}\right),\overrightarrow{AM}\left(-2-\sqrt{5};\sqrt{5}-1\right),\overrightarrow{BM}\left(-4-\sqrt{5};\sqrt{5}-2\right)$

$$\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}{\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2}\sqrt{\left(4+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}-2\right)^2}}=\frac{4\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}\left(3\sqrt{5}+2\right)}=\frac{\sqrt{10}+54\sqrt{2}}{82}\quad(*)$$

Với $t=\frac{-3+4\sqrt{5}}{6}\Rightarrow I\left(\frac{-3+4\sqrt{5}}{6};\frac{15-8\sqrt{5}}{6}\right)$

Đường thẳng $IM: x-y+3-2\sqrt{5}=0$

Tọa độ điểm $M$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y=-3\\ x-y=-3+2\sqrt{5}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3+\sqrt{5}\\ y=-\sqrt{5}\end{cases}$

Vậy $M\left(-3+\sqrt{5};-\sqrt{5}\right),\overrightarrow{AM}\left(-2+\sqrt{5};-\sqrt{5}-1\right),\overrightarrow{BM}\left(-4+\sqrt{5};-\sqrt{5}-2\right)$

$$\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}-4\right)+\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}+1\right)^2}\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}+2\right)^2}}=\frac{4\sqrt{5}-3}{\left(3\sqrt{5}-2\right)\sqrt{2}}=\frac{54\sqrt{2}-\sqrt{10}}{82}\quad(**)$$

Từ (*) và (**) suy ra điểm cần tìm $M\left(-3+\sqrt{5};-\sqrt{5}\right)$

Vậy $2x+y=-6+\sqrt{5}$.

**Làm trắc nghiệm.**

a) $\begin{cases}x+y=-3\\ 2x+y=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=0\end{cases}\Rightarrow H=1.$

b) $\begin{cases}x+y=-3\\ 2x+y=-6+\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3+\sqrt{5}\\ y=-\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow H\approx 0,892747.$

c) $\begin{cases}x+y=-3\\ 2x+y=-3-\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{5}\\ y=-3+\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow H\approx 0,968241.$

d) $\begin{cases}x+y=-3\\ 2x+y=-6-\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3-\sqrt{5}\\ y=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow H\approx 0,969876.$

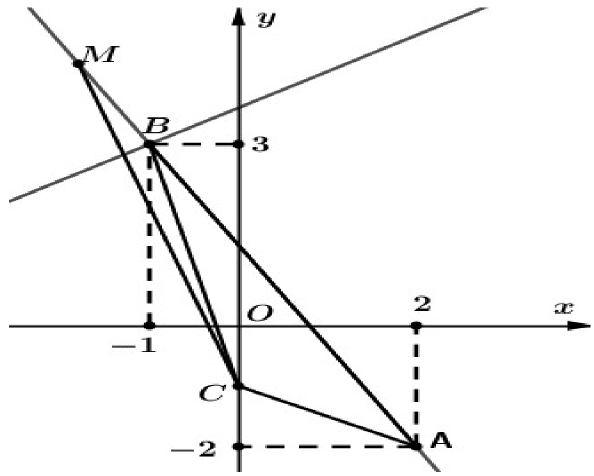
Do đó $H_{Min}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3+\sqrt{5}\\ y=-\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow 2x+y=-6+\sqrt{5}.$

**Câu 4.** Xét số phức thỏa mãn $z$ thỏa mãn $|iz-2i-2|-|z+1-3i|=\sqrt{34}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|(1-i)z+1+i|$.

**A.** $P_{\min} = \sqrt{17}$. **B.** $P_{\min} = \sqrt{34}$. **C.** $P_{\min} = \dfrac{13}{\sqrt{17}}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có: $|iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow |z - 2 + 2i| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34}$ $(*)$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z$. $A(2; -2)$ là điểm biểu diễn của số phức $2 - 2i$

$B(-1; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức $-1 + 3i$ $AB = \sqrt{34}$.

Từ $(*)$ ta có $MA - MB = \sqrt{34}$, mà $MA - MB \le AB$. Suy ra M, A, B thẳng hàng.

Có $\overrightarrow{MA} = (2 - x; -2 - y)$; $\overrightarrow{AB} = (-3; 5)$. Ta có $P = |(1 - i)z + 1 + i| = \sqrt{2}|z + i|$.

Gọi $C(0; -1)$ là điểm biểu diễn của số phức $-i$. Nên $P = \sqrt{2}|z + i| = \sqrt{2}MC$

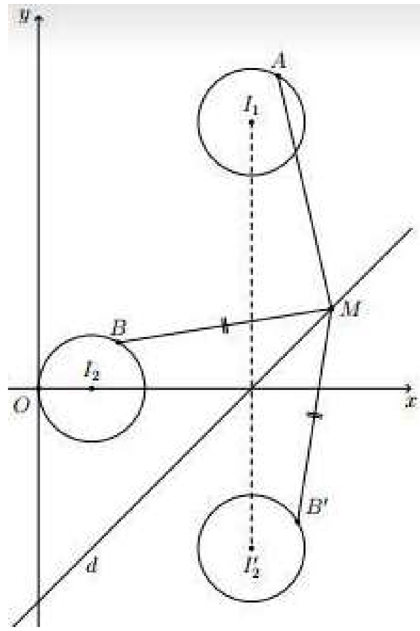
Xét đường thẳng $d$ đi qua $B$ và vuông góc với $AB$ nên đường thẳng $d$ có phương trình $3x - 5y + 18 = 0$. Dễ thấy $A$, $C$ cùng phía so với d nên $P = \sqrt{2}MC \ge \sqrt{2}BC = \sqrt{34}$.

**Câu 5.** Cho số phức $z, z_1, z_2$ thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $|z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| - |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

**A.** 8 **B.** $6$. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $A$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1$. Suy ra $A$ thuộc đường tròn $(C_1)$ tâm $I_1(4;5), R=1$.

Gọi $B$ là điểm biểu diễn của số phức $z_2$. Suy ra $B$ thuộc đường tròn $(C_2)$ tâm $I_2(1;0), R=1$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$

Theo giả thiết $|\overline{z}+4i| = |z-8+4i| \Leftrightarrow x-y=4$ . Suy ra M thuộc đường thẳng $(d)$ $x-y-4=0$

Gọi $(C_2')$ có tâm $I_2'(4;-3), R=1$ là đường tròn đối xứng với đường tròn $(C_2)$ tâm $I_2(1;0), R_2=1$ qua đường thẳng d. Gọi $B'$ là điểm đối xứng với đối xứng với $B$ qua đường thẳng d . Ta có $P=|z-z_1|+|z-z_2| = MA+MB = MA+MB' \geq AB' = I_1I_2' - R_1 - R_2 = 6$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $A, B', I_1, I_2', M$ thẳng hàng. Khi đó $\overrightarrow{I_1A} = \frac{1}{8}\overrightarrow{I_1I_2'}$ suy ra $A(4;4)$ và

$\overrightarrow{I_2B'} = \frac{1}{8}\overrightarrow{I_2'I_1}$ suy ra $B'(4;-2) \Rightarrow B(2;0)$. $AB = 2\sqrt{5}$.

Vậy $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$ .

**Câu 6.** Cho số phức $z = a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

**A.** $P=-5$. **B.** $P=7$. **C.** $P=3$. **D.** $P=-1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết $z+2+i-|z|(1+i)=0 \Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0$.

$$\Leftrightarrow \left(a+2-\sqrt{a^2+b^2}\right)+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0 & (1) \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0 & (2) \end{cases}.$$

Lấy $(1)-(2)$ ta được $a-b+1=0 \Leftrightarrow b=a+1$. Thay vào phương trình $(1)$ ta được

$$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2a^2+2a+1}=a+2 \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -2 \\ 2a^2+2a+1=(a+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -2 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right..$$

+ Với $a=-1 \Rightarrow b=0 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow |z|=1$ (loại)

+ Với $a=3 \Rightarrow b=4 \Rightarrow z=3+4i \Rightarrow |z|=5$ (thỏa mãn).

Vậy $P=a+b=7$.

**Câu 7.** Cho số phức $z$ và $w$ biết chúng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện: $\left|\dfrac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1$ và $w=iz$. Tìm giá trị lớn nhất của $M=|z-w|$

**A.** $M=3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $M=3\sqrt{3}$. **D.** $M=3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

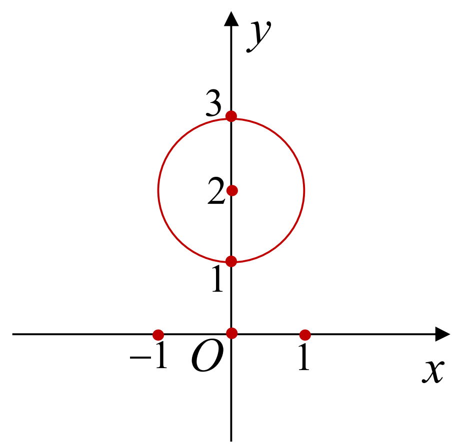
**Cách 1.**

Ta có: $\left|\dfrac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(1+i)z+2(1-i)}{1-i}\right|=1 \Leftrightarrow |(1+i)z+2(1-i)|=|1-i| \Leftrightarrow |(1+i)z+2(1-i)|=\sqrt{2}$.

Mặt khác: $|(1+i)z|-|2(1-i)| \le |(1+i)z+2(1-i)|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |(1+i)z| \le |2(1-i)|+\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z| \le 3\sqrt{2}$.

Khi đó: $M=|z-w|=|z-iz|=|(1-i)z|=\sqrt{2}|z| \le 3\sqrt{2}$.

**Cách 2.**




$\left|\dfrac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(1+i)z+2(1-i)}{1-i}\right|=1 \Leftrightarrow |(1+i)z+2(1-i)|=|1-i|$

$\Leftrightarrow |(1+i)z+2(1-i)|=\sqrt{2}$ $(1)$

Đặt $z=x+yi$ thay vào $(1)$ ta được $|(1+i)(x+yi)+2(1-i)|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-y+2)^2+(x+y-2)^2=2 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=1$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ trên hệ trục tọa độ là đường tròn tâm $I(0;2)$ bán kính $R=1$.

Khi đó: $1 \le |z| \le 3$

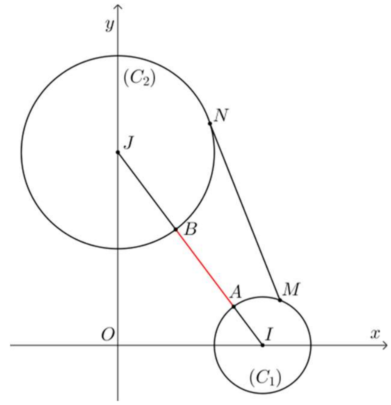
$\Rightarrow M=|z-w|=|z-iz|=|(1-i)z|=\sqrt{2}|z| \le 3\sqrt{2}$.

**Câu 8.** **(THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Quảng Trị - lần 1 – 2019)** Cho hai số phức $z$, $w$ thỏa mãn $|z-3\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ và $|w-4\sqrt{2}i|=2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=z_0$ và $w=w_0$. Tính $|3z_0-w_0|$.

**A.** $6\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Theo giả thiết: $\left|z-3\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\dfrac{z}{\sqrt{2}}-3\right|=1\ (1)$,

$\left|w-4\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\dfrac{w}{\sqrt{2}}-4i\right|=2\ (2)$.

Trong mặt phẳng phức, gọi $M$ , $N$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $\dfrac{z}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{w}{\sqrt{2}}$.

Từ $(1)\Rightarrow M\in$ đường tròn $(C_1):(x-3)^2+y^2=1$ có tâm $I(3;0)$ và bán kính $R_1=1$.

Từ $(2)\Rightarrow N\in$ đường tròn $(C_1):x^2+(y-4)^2=4$ có tâm $J(0;4)$ và bán kính $R_2=2$.

Hơn nữa, $|z-w|=MN\sqrt{2}$ nên $|z-w|$ đạt GTNN $\Leftrightarrow MN$ đạt GTNN.

Vì $IJ=5>R_1+R_2=3$ nên $(C_1)$ và $(C_2)$ nằm ngoài nhau.

Gọi $A$, $B$ lần lượt là giao điểm của đoạn $IJ$ với $(C_1)$, $(C_2)$.

Dễ thấy $MN\geq AB$ nên $MN$ đạt GTNN $\Leftrightarrow M\equiv A$ và $N\equiv B$.

Phương trình tham số của đoạn $IJ$ là: $\begin{cases}x=3-3t\\ y=4t\end{cases}$, $0\leq t\leq 1$.

Cho đoạn $IJ$ cắt $(C_1)$, ta được: $(-3t)^2+(4t)^2=1\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{5}$ (vì $0\leq t\leq 1$) $\Rightarrow A\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{4}{5}\right)$.

Cho đoạn $IJ$ cắt $(C_2)$, ta được: $(3-3t)^2+(4t-4)^2=4\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{5}$ (vì $0\leq t\leq 1$) $\Rightarrow B\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{12}{5}\right)$.

Mà $A$, $B$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{w_0}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow\left|3z_0-w_0\right|=\sqrt{2}.\left|\dfrac{3z_0}{\sqrt{2}}-\dfrac{w_0}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{2}.\left|3\overline{OA}-\overline{OB}\right|=6\sqrt{2}$.

Vậy $\left|3z_0-w_0\right|=6\sqrt{2}$.

**Câu 9.** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z|=1$. GTLN của biểu thức $P=\left|z^3-z+2\right|$ là:

**A.** $\sqrt{13}$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $\sqrt{15}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $z=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết, $|z|=1\Rightarrow z.\overline{z}=1$ và $x^2+y^2=1$.

$P=|z|.\left|z^2-1+2\overline{z}\right|=\left|z^2-1+2\overline{z}\right|=\left|x^2-y^2+2xyi-1+2x-2yi\right|=\left|\left(x^2+2x-y^2-1\right)+2y(x-1)i\right|$

$=\sqrt{\left(x^2+2x-y^2-1\right)^2+4y^2(x-1)^2}=\sqrt{\left(x^2+2x-1+x^2-1\right)^2+4\left(1-x^2\right)(x-1)^2}$ (vì $y^2=1-x^2$)

$=\sqrt{16x^3-4x^2-16x+8}$.

Vì $x^2+y^2=1\Rightarrow x^2=1-y^2\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1$.

Xét hàm số $f(x)=16x^3-4x^2-16x+8,\ x\in[-1;1]$.

$f'(x)=48x^2-8x-16$. $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}\in[-1;1] \\ x=\dfrac{2}{3}\in[-1;1] \end{array}\right.$.

$f(-1)=4$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=13$; $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{27}$; $f(1)=4$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} f(x)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=13$.

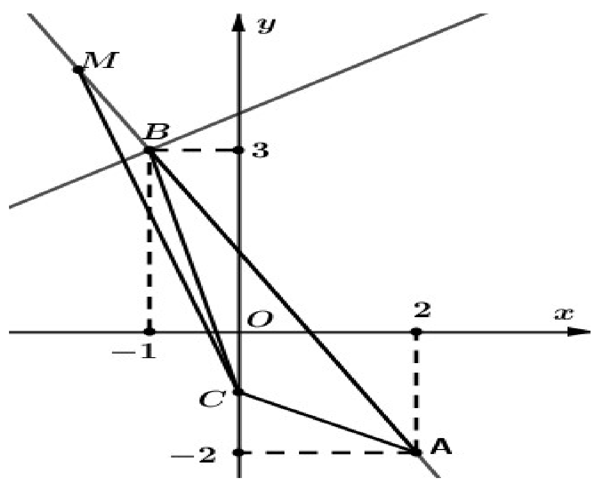
Vậy $\max P=\sqrt{13}$.

**Câu 10.** Xét số phức thỏa mãn $z$ thỏa mãn $|iz-2i-2|-|z+1-3i|=\sqrt{34}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|(1-i)z+1+i|$.

**A.** $P_{\min}=\dfrac{13}{\sqrt{17}}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$. **C.** $P_{\min}=\sqrt{17}$. **D.** $P_{\min}=\sqrt{34}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có: $|iz-2i-2|-|z+1-3i|=\sqrt{34}\Leftrightarrow|z-2+2i|-|z+1-3i|=\sqrt{34}$ (*)

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z$. $A(2;-2)$ là điểm biểu diễn của số phức $2-2i$

$B(-1;3)$ là điểm biểu diễn của số phức $-1+3i$ $AB=\sqrt{34}$.

Từ (*) ta có $MA-MB=\sqrt{34}$, mà $MA-MB\le AB$. Suy ra M, A, B thẳng hàng.

Có $\overrightarrow{MA}=(2-x;-2-y)$; $\overrightarrow{AB}=(-3;5)$. Ta có $P=|(1-i)z+1+i|=\sqrt{2}|z+i|$.

Gọi $C(0;-1)$ là điểm biểu diễn của số phức $-i$. Nên $P=\sqrt{2}|z+i|=\sqrt{2}MC$

Xét đường thẳng $d$ đi qua $B$ và vuông góc với $AB$ nên đường thẳng $d$ có phương trình $3x-5y+18=0$. Dễ thấy $A,\ C$ cùng phía so với d nên $P=\sqrt{2}MC\ge\sqrt{2}BC=\sqrt{34}$.

**Câu 11.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

**A.** $\min|w|=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=\dfrac{3}{2}$. **D.** $\min|w|=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo giả thiết, $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$

$\Leftrightarrow \left|(z-1+2i)(z-1-2i)\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$

$\Leftrightarrow |z-1+2i|.\left(|z-1-2i|-|z-1+3i|\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}|z-1+2i|=0 & (1)\\ |z-1-2i|=|z-1+3i| & (2)\end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow z-1+2i=0\Leftrightarrow z=1-2i$. Khi đó, $|w|=|1-2i-2+2i|=1\ \ (3)$.

Đặt $z=x+yi\ \ (x,\ y\in\mathbb{R})$. Khi đó, $(2)\Leftrightarrow \left|(x-1)+(y-2)i\right|=\left|(x-1)+(y+3)i\right|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2\Leftrightarrow (y-2)^2=(y+3)^2\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow z=x-\dfrac{1}{2}i$.

$\Rightarrow |w|=\left|(x-2)+\dfrac{3}{2}i\right|=\sqrt{(x-2)^2+\dfrac{9}{4}}\geq\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. $(4)$.

Từ $(3)$ và $(4)\Rightarrow \min|w|=1$.

**Câu 12.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$. Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

**A.** $\min|w|=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=\dfrac{3}{2}$. **D.** $\min|w|=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo giả thiết, $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$

$\Leftrightarrow \left|(z-1+2i)(z-1-2i)\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$

$\Leftrightarrow |z-1+2i|.\left(|z-1-2i|-|z-1+3i|\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}|z-1+2i|=0 & (1)\\ |z-1-2i|=|z-1+3i| & (2)\end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow z-1+2i=0\Leftrightarrow z=1-2i$. Khi đó, $|w|=|1-2i-2+2i|=1\ \ (3)$.

Đặt $z=x+yi\ \ (x,\ y\in\mathbb{R})$. Khi đó, $(2)\Leftrightarrow \left|(x-1)+(y-2)i\right|=\left|(x-1)+(y+3)i\right|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2\Leftrightarrow (y-2)^2=(y+3)^2\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow z=x-\dfrac{1}{2}i$.

$\Rightarrow |w|=\left|(x-2)+\dfrac{3}{2}i\right|=\sqrt{(x-2)^2+\dfrac{9}{4}}\geq\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. $(4)$.

Từ $(3)$ và $(4)\Rightarrow \min|w|=1$.

**Câu 13.** **(HK2-L12-Chuyên-Lê-Hồng-Phong-TPHCM-2019)** Cho số phức $z$ thỏa điều kiện $|z-3-2i|+|z+5+2i|=5\sqrt{5}$, giá trị nhỏ nhất của $|z-7-4i|$ đạt được khi $z=a+bi$. Tính $T=a^2+4b^2$

**A.** $41$. **B.** $34$. **C.** $23$. **D.** $10$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $M(a,b)$ là điểm biểu diễn số phức $z$.

$|z-3-2i|+|z+5+2i|=5\sqrt{5} \Leftrightarrow MA+MB=5\sqrt{5}$ với $A(3;2)$, $B(-5;-2)$.

Do $AB=4\sqrt{5}<5\sqrt{5}$ nên tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ là Elip có hai tiêu điểm $A$, $B$, tiêu cự $AB=4\sqrt{5}$ và độ dài trục lớn bằng $5\sqrt{5}$.

$P=|z-7-4i|=MC$ với $C(7;4)$.

Nhận xét: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-8;-4)\\ \overrightarrow{AC}=(4;2)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC} \Rightarrow C$ nằm trên đường thẳng $AB$.

Do đó $P$ nhỏ nhất khi $M$ ***trùng với đỉnh*** $A_1$ của Elip nằm trên trục lớn.

$AB$ qua $A(3;2)$ có vtcp $\overrightarrow{AB}=(-8;-4)=-4(2;1)$ nên có ptts: $\begin{cases}x=3+2t\\ y=2+t\end{cases}$.

$A_1\in AB \Rightarrow A_1(3+2t;2+t)$.

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$ $\Rightarrow I(-1;0)$.

Ta có: $IA_1$ là nửa trục lớn nên $IA_1=\dfrac{5\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow (4+2t)^2+(2+t)^2=\dfrac{125}{4}$

$$\Leftrightarrow 20t^2+80t-45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow A_1\left(4;\dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow A_1C=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\\ t=-\dfrac{9}{2} \Rightarrow A_1\left(-6;-\dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow A_1C=\dfrac{13\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Suy ra $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow M\left(4;\dfrac{5}{2}\right) \Leftrightarrow z=4+\dfrac{5}{2}i$.

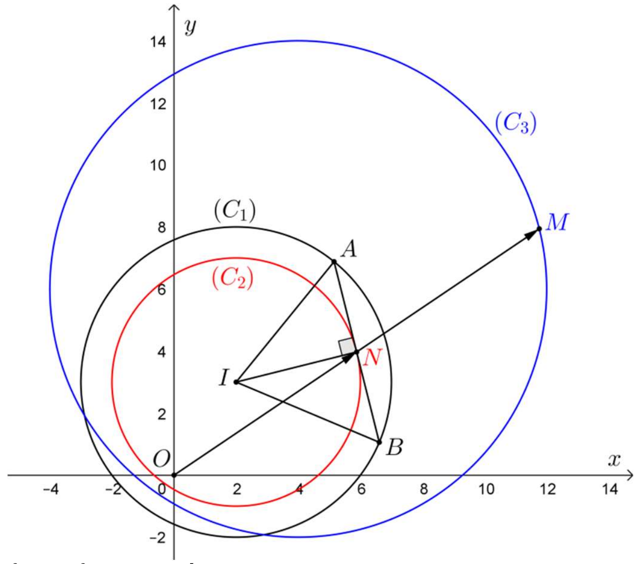
Khi đó $\begin{cases}a=4\\ b=\dfrac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow T=a^2+4b^2=41$.

**Câu 14.** **(Thi Thử Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1. 2018-2019)** Cho các số phức $z_1$, $z_2$ thỏa mãn phương trình $|z-2-3i|=5$ $(1)$ và $|z_1-z_2|=6$ $(2)$. Biết tập hợp các điểm $M$ biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính $R$ của đường tròn đó.

**A.** $R=8$. **B.** $R=4$. **C.** $R=2\sqrt{2}$. **D.** $R=2$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $A$, $B$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1$, $z_2$.

Khi đó, $(1)$ là phương trình đường tròn $(C_1)$ tâm $I(2;3)$, bán kính $r_1 = 5$ và $(2) \Leftrightarrow AB = 6$.

Gọi $N$ là trung điểm $AB \Rightarrow IN = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ .

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm $N$ là đường tròn $(C_2)$ tâm $I$, bán kính $r_2 = 4$.

Mặt khác, $N$ cũng là điểm biểu diễn số phức $t = \frac{z_1 + z_2}{2}$, mà $w = 2t$

$\Rightarrow M$ là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{OM} = 2.\overrightarrow{ON}$ hay $M$ là ảnh của $N$ qua phép vị tự tâm $O$, tỉ số $k = 2$.

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm $M$ là đường tròn $(C_3)$ là ảnh của $(C_2)$ qua phép vị tự tâm $O$, tỉ số $k = 2$.

$\Rightarrow (C_3)$ có tâm $J$ và bán kính $r_3$ thỏa mãn: $\begin{cases} \overrightarrow{OJ} = 2.\overrightarrow{OI} \\ r_3 = 2.r_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J(4;6) \\ r_3 = 8 \end{cases}$.

Vậy $R = 8$.

**Câu 15.** **(SGD Hưng Yên - 2019)** Cho số phức $z$ thoả mãn $|z|=1$. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

**A.** $3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{13}{4}$. **C.** $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{39}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Thay $|z|^2=1$ vào $P$ ta có

$P=|z+1|+|z^2-z+1|=|z+1|+\left|z^2-z+|z|^2\right|=|z+1|+|z^2-z+z.\overline{z}|=|z+1|+|z||z+\overline{z}-1|$

$=|z+1|+|z+\overline{z}-1|$.

Mặt khác $|z+1|^2=(z+1)(\overline{z}+1)=2+z+\overline{z}$.

Đặt $t=z+\overline{z}$ do $|z|=1$ nên điều kiện $t\in[-2;2]$.

Suy ra $P=\sqrt{t+2}+|t-1|$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+2}+|t-1|$ với $t\in[-2;2]$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}+1$ với $t>1$. Suy ra $f'(t)>0$ với $t>1$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}-1$ với $t<1$. Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

| $t$ | $-2$ | | $-\frac{7}{4}$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $+$ | \| |
| $f(t)$ | $3$ | ↗ | $\frac{13}{4}$ | ↘ | $\sqrt{3}$ | ↗ | $3$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $M=\dfrac{13}{4}$ tại $t=\dfrac{-7}{4}$ và $m=\sqrt{3}$ tại $t=2$.

Vậy $M.m=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

**Câu 16.** Cho số phức $z$ và gọi $z_1$, $z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+8i=0$ ($z_1$ có phần thực dương). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-z_1|+|z_2-z|+\left|\overline{z}+2z_1+\dfrac{z_2}{2}\right|$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n}+p\sqrt{q}$ (trong đó $n,p\in\mathbb{N}$; $m$, $q$ là các số nguyên tố). Tổng $m+n-p-q$ bằng

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $0$. **D.** $2$.

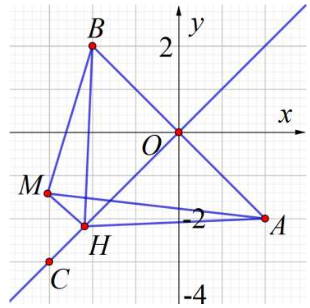
**Lời giải**

**Chọn A**

$z^2+8i=0\Rightarrow z_1=2-2i$ và $z_2=-2+2i$.

$P=|z-z_1|+|z_2-z|+\left|\overline{z}+2z_1+\dfrac{z_2}{2}\right|=|z-z_1|+|z-z_2|+\left|z+2\overline{z_1}+\dfrac{\overline{z_2}}{2}\right|=MA+MB+MC$.

Trong đó $M$ , $A(2;-2)$, $B(-2;2)$, $C(-3;-3)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z$ , $z_1$ , $z_2$ , $\omega=-2\overline{z_1}-\frac{\overline{z_2}}{2}=-3-3i$ .




Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $M$ trên $OC$ .
Ta có $MA+MB\ge HA+HB\Rightarrow MA+MB+MC\ge HA+HB+HC$ .
Do đó $P_{\min}=(MA+MB+MC)_{\min}=HA+HB+HC\Leftrightarrow M\equiv H\Rightarrow M\in OC:y=x$.

Gỉa sử $M(x;x)\ (x\in[-3;0))\Rightarrow P=MA+MB+MC=\sqrt{2}(x+3)+2\sqrt{2(x^2+4)}$

$\Rightarrow P'=\sqrt{2}+2\sqrt{2}.\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\Rightarrow P'=0\Rightarrow x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\in[-3;0)$.

Vậy $P_{\min}=\sqrt{2}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+3\right)+2\sqrt{2\left[\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+4\right]}=2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ .

Suy ra $m=2$ , $n=6$ , $p=3$ , $q=2\Rightarrow m+n-p-q=3$ .

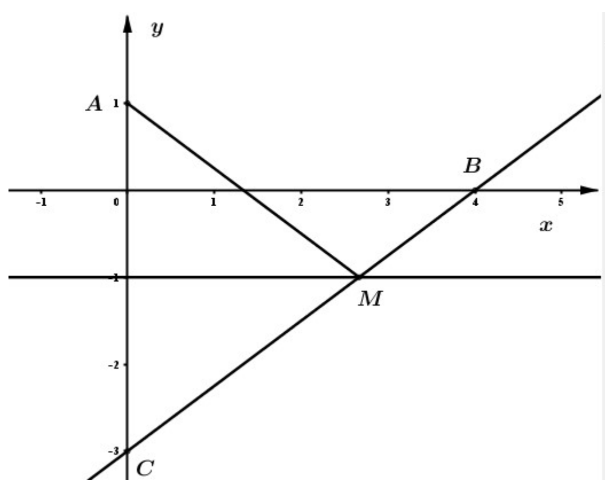
**Câu 17.** Xét các số phức $z$ thỏa mãn $|\overline{z}|=|z+2i|$, giá trị nhỏ nhất của $|z-i|+|z-4|$ bằng

**A.** $6$ . **B.** $4$ . **C.** $3\sqrt{3}$ . **D.** $5$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in R)$. Khi đó $|\overline{z}|=|z+2i|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+2)^2}\Leftrightarrow y=-1$.
Suy ra điểm $M$ biểu diễn số phức $z$ thuộc đường thẳng $y=-1$.
Xét $P=|z-i|+|z-4|=|x+(y-1)i|+|x-4+yi|$.
Đặt $A(0;1);B(4;0)$ suy ra $P=MA+MB$ .




$A,B$ nằm cùng phía so với đường thẳng $y=-1$, gọi $C(0;-3)$ là điểm đối xứng với $A(0;1)$ qua đường thẳng $y=-1$.

Khi đó $P = MA + MB = MC + MB \geq BC = \sqrt{(0-4)^2 + (-3-0)^2} = 5$. Dấu bằng xảy ra khi $M, B, C$ thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng $BC: 3x - 4y - 12 = 0$, suy ra tọa độ điểm $M\left(\frac{8}{3}; -1\right)$ hay $z = \frac{8}{3} - i$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z-i| + |z-4|$ bằng $5$ đạt được khi $z = \frac{8}{3} - i$.

**Câu 18.** Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi $(C)$ là tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z$ trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và trục hoành bằng

**A.** $\frac{8}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Theo giả thiết, $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ nên: $\begin{cases} x = m - 2 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x + 2 \\ y = (x+2)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 4x + 3$.

$\Rightarrow (C): y = x^2 + 4x + 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $Ox$: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$ và trục hoành:

$$S = \int_{-3}^{-1} |x^2 + 4x + 3| \mathrm{d}x = \left| \int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3) \mathrm{d}x \right| = \left| \left( \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right) \Big|_{-3}^{-1} \right| = \left| -\frac{4}{3} - 0 \right| = \frac{4}{3}.$$

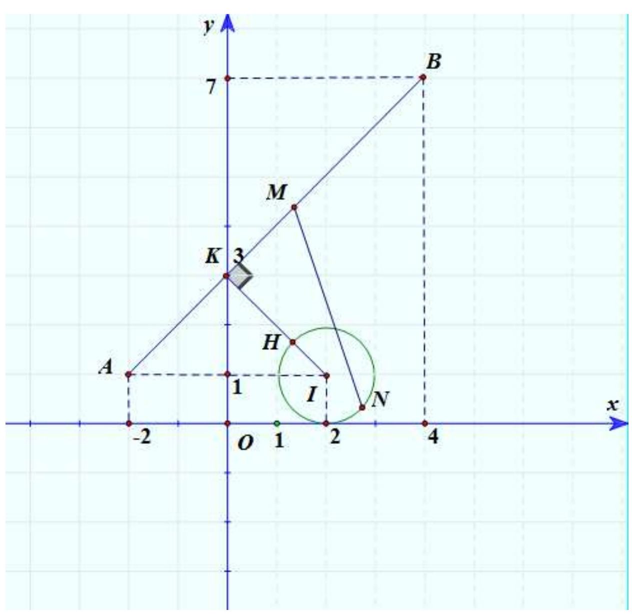
Vậy $S = \frac{4}{3}$.

**Câu 19.** Cho hai số phức $z_1, z_2$ thoả mãn $|z_1 + 2 - i| + |z_1 - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z_1 + z_2|$.

**A.** $\sqrt{2} + 1$. **B.** $2\sqrt{2} + 1$. **C.** $2\sqrt{2} - 1$. **D.** $\sqrt{2} - 1$.

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi $M$ là điểm biểu diễn số phức $z_1$ và $A(-2;1)$; $B(4;7)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $-2+i$, $4+7i$. Ta có $AB=6\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng $AB$ là $d: x-y+3=0$.

+) $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=AB$. Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z_1$ là đoạn thẳng $AB$.

+) $|iz_2-1+2i|=1 \Leftrightarrow |iz_2-1+2i||i|=1 \Leftrightarrow |-z_2-2-i|=1$.

Gọi $N$ là điểm biểu diễn số phức $-z_2$ và $I(2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $2+i$. Ta có $IN=1$ Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $-z_2$ là đường tròn $(C)$ có phương trình:

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

$d(I,AB)=2\sqrt{2}>1$, suy ra $AB$ không cắt đường tròn.

Gọi $K$ là hình chiếu của $I(2;1)$ lên $AB$. Dễ thấy $K$ nằm trên đoạn thẳng $AB$.

Gọi $H$ là giao điểm của đoạn $IK$ với đường tròn $(C)$.

Ta có $|z_1+z_2|=MN \geq KH = d(I,AB)-R=2\sqrt{2}-1$.

Suy ra $min|z_1+z_2|=2\sqrt{2}-1$.

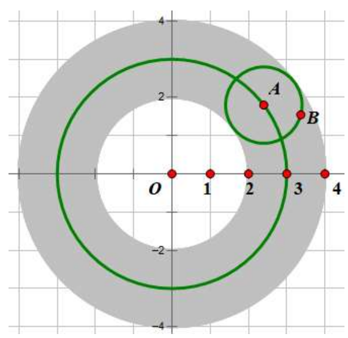
**Câu 20.** Cho hai số phức $z, w$ thay đổi thỏa mãn $|z|=3, |z-w|=1$. Biết tập hợp điểm của số phức $w$ là hình phẳng $H$. Tính diện tích $S$ của $H$.

**A.** $S=20\pi$. **B.** $S=12\pi$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=16\pi$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:**




Với mỗi số phức $z$ thỏa $|z|=3$, gọi $A$ là điểm biểu diễn của $z$ thì $A$ nằm trên đường tròn tâm $O$ bán kính bằng 3. Gọi $B$ là điểm biểu diễn của $w$ thì $B$ nằm trên đường tròn tâm $A$ bán kính bằng 1.

Khi $A$ chạy trên đường tròn tâm $O$ bán kính bằng 3 thì tập hợp các điểm $B$ là hình vành khăn giới hạn bởi tròn tâm $O$ bán kính bằng 2 và tròn tâm $O$ bán kính bằng 4. Suy ra $S=\pi.4^2-\pi.2^2=12\pi.$

**Cách 2:** Ta có $|w|=|w-z+z|\leq|w-z|+|z|=4$. Mặt khác $|w|=|w-z+z|\geq\big||w-z|-|z|\big|=2$.

Vậy $2\leq|w|\leq4$ nên $H$ là hình vành khăn giới hạn bởi tròn tâm $O$ bán kính bằng $2$ và tròn tâm $O$ bán kính bằng $4$. Suy ra $S=\pi.4^2-\pi.2^2=12\pi$.

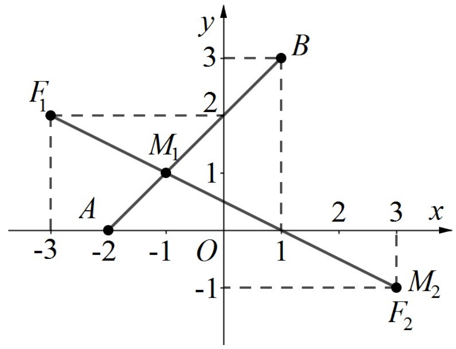
**Câu 21.** Xét các số phức $z$ thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$. Gọi $M$, $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+|z-1-3i|$. Tìm $M$, $m$.

**A.** $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m=\sqrt{3}$. **B.** $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$.

**C.** $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=\sqrt{2}$. **D.** $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $M$ là điểm biểu diễn số phức $z$, $F_1(-3;2)$, $F_2(3;-1)$, $A(-2;0)$ và $B(1;3)$.

Ta có $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$ và $F_1F_2=3\sqrt{5} \Rightarrow MF_1+MF_2=F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm $M$ là đoạn thẳng $F_1F_2$.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy:

+ $M=P_{\max}=M_2A+M_2B=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$.

+ $m=P_{\min}=M_1A+M_1B=AB=3\sqrt{2}$.

Vậy $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$.

**Câu 22.** Cho số phức $z=a+bi$ với $a,b$ là hai số thực thỏa mãn $a-2b=1$. Tính $|z|$ khi biểu thức $|z+1+4i|+|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{\dfrac{1}{5}}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $a-2b=1 \Leftrightarrow a=2b+1$.(*)

Ta có: $T=|z+1+4i|+|z-2-5i|=\sqrt{(a+1)^2+(b+4)^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b-5)^2}$

$$\stackrel{(*)}{=}\sqrt{(2b+2)^2+(b+4)^2}+\sqrt{(2b-1)^2+(b-5)^2}=\sqrt{5b^2+16b+20}+\sqrt{5b^2-14b+26}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{5}b+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2}+\sqrt{\left(-\sqrt{5}b+\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\left(\sqrt{5}b+\frac{8}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}b+\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{5}}+\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{45+45}=3\sqrt{10}.$$

$$T_{\min}=3\sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{9}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}b+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)=\frac{6}{\sqrt{5}}\left(-\sqrt{5}b+\frac{7}{\sqrt{5}}\right)\\ \left(\sqrt{5}b+\frac{8}{\sqrt{5}}\right).\left(-\sqrt{5}b+\frac{7}{\sqrt{5}}\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow 15b+24=-10b+14 \Leftrightarrow b=-\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{4}{5}+1=\frac{1}{5} \Rightarrow |z|=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

**Cách 2:** Gọi $M$ là điểm biểu diễn số phức $z$, ta có $M\in\Delta: x-2y-1=0$, $A(-1;-4), B(2;5)$.

Ta có: $[-1-2.(-4)-1].[2-2.5-1]<0 \Rightarrow A, B$ nằm khác phía đối với đường thẳng $\Delta: x-2y-1=0$.

$T=|z+1+4i|+|z-2-5i|=MA+MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M=AB\cap\Delta$.

Ta có: phương trình đường thẳng $AB:3x-y-1=0\Rightarrow M\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\Rightarrow|z|=\sqrt{\frac{1}{5}}$ .

**Câu 23.** **(THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Quảng Trị - lần 1 – 2019)** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất một số phức $z$ thỏa mãn đồng thời $|z|=m$ và $|z-4m+3mi|=m^2$.

**A.** 4. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $z=a+bi$ theo giả thiết ta có $\begin{cases} a^2+b^2=m^2 & (C_1) \\ (a-4m)^2+(b+3m)^2=m^4 & (C_2) \\ m\geq 0 \end{cases}$ (I)

Tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ thỏa mãn $a^2+b^2=m^2$ là đường tròn $(C_1)$ có tâm $I_1(0;0),\ R_1=m$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ thỏa mãn $(a-4m)^2+(b+3m)^2=m^4$ là đường tròn $(C_2)$ có tâm $I_2(4m;-3m),\ R_2=m^2$

Để tồn tại duy nhất một số phức $z$ thì hệ (I) phải có nghiệm duy nhất. khi đó 2 đường tròn $(C_1)$ và $(C_2)$ phải tiếp xúc với nhau

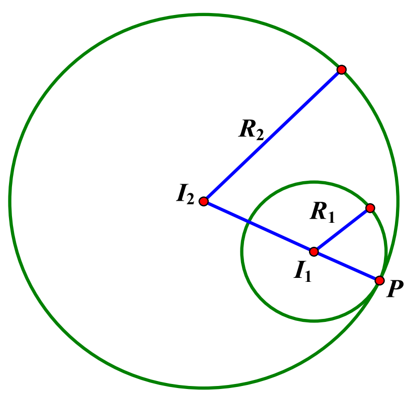
* Nếu $m=0$ thì $z=a+bi=0+0i=0$

* Nếu $m\geq 1\Rightarrow\begin{cases} I_1\neq I_2 \\ R_2=m^2\geq m=R_1 \\ I_1I_2=5m>m=R_1 \end{cases}$

Xét 2 trường hợp:

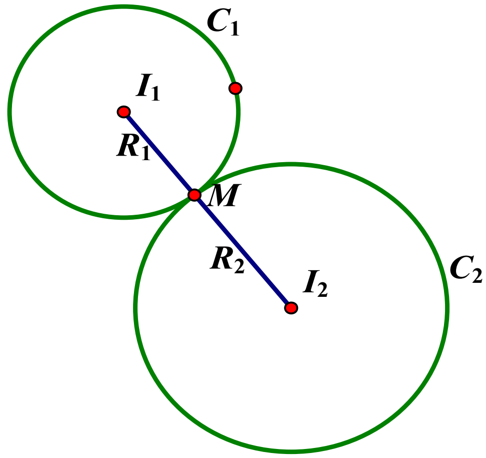
*TH1: Hai đường tròn tiếp xúc trong:*

Khi đó $R_2=I_1I_2+R_1\Leftrightarrow m^2=6m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0\ (loai) \\ m=6 \end{array}\right.\Rightarrow m=6$



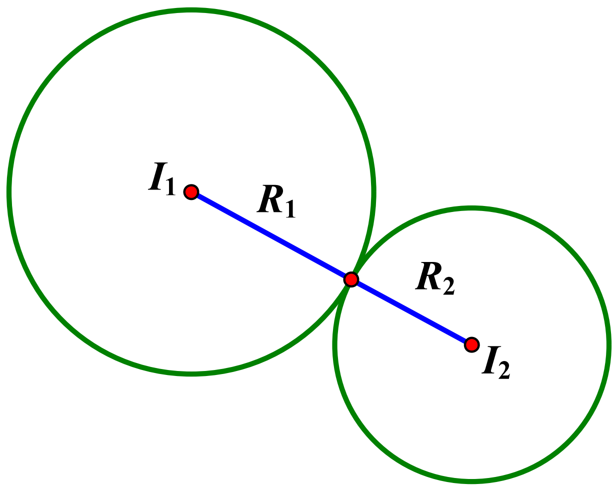

*TH2: Hai đường tròn tiếp xúc ngoài:*

$\Leftrightarrow I_1I_2=R_1+R_2\Leftrightarrow 5m=m^2+m\Leftrightarrow m^2-4m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0\ (loai) \\ m=4 \end{array}\right.\Rightarrow m=4$




* Nếu $0 < m < 1 \Rightarrow \begin{cases} I_1 \neq I_2 \\ R_2 = m^2 < m = R_1 \\ I_1I_2 = 5m > R_1 > R_2 \end{cases} \Rightarrow$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài

$\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow 5m = m^2 + m \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0\ (loai) \\ m = 4\ (loai) \end{array}\right.$




Vậy tổng tất cả các giá trị của $m$ là $0 + 6 + 4 = 10$.

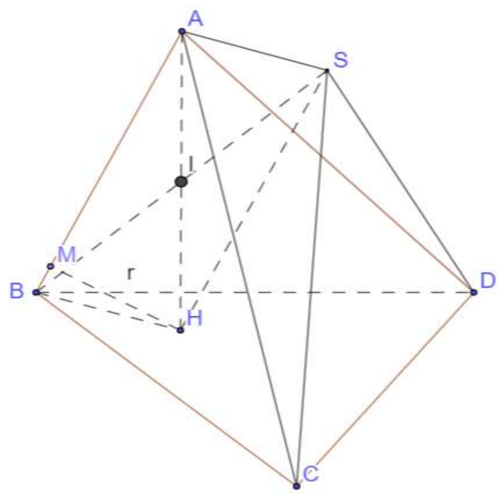
**-------------- HẾT --------------**

**Câu 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có hình chiếu của $A$ lên mặt phẳng $(\text{BCD})$ là $H$ nằm trong tam giác $BCD$. Biết rằng $H$ cũng là tâm của một mặt cầu bán kính $\sqrt{3}$ và tiếp xúc các cạnh $AB, AC, AD$. Dựng hình bình hành $AHBS$. Tính giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $3$. **D.** $3\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi M,N,P lần lượt là hình chếu của H lên AB,AC,AD ta có

$\text{HM=HN=HP=}\sqrt{3} \Rightarrow \text{AM=AN=AP} \Rightarrow \text{AH} \perp (\text{MNP}) \Rightarrow (\text{MNP}) \parallel (\text{BCD}) \Rightarrow AB = AC = AD$

( AH là trục đường tròn $\Delta$MNP )

Vậy A thuộc trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta$ BCD

AH là trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta$ BCD .

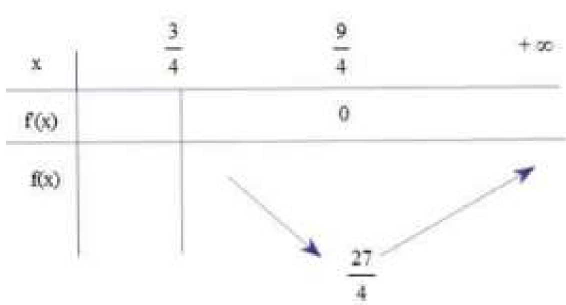
Gọi $\text{I=AH} \cap \text{BS} \Rightarrow \text{IB=IC=ID=IS}$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.BCD

$$IH = x \Rightarrow \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HA^2} \Rightarrow HB^2 = \frac{12x^2}{4x^2 - 3}$$

$$\Delta HBI \perp tai\, H : BI^2 = HB^2 + HI^2 = \frac{4x^4 + 9x^2}{4x^2 - 3}$$

$$t = x^2 \Rightarrow f(t) = \frac{4t^2 + 9t}{4t - 3} (t > \frac{3}{4}) \Rightarrow f'(t) = \frac{16t^2 - 24t - 27}{(4t-3)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{9}{4}(n) \vee t = -\frac{3}{4}(l)$$



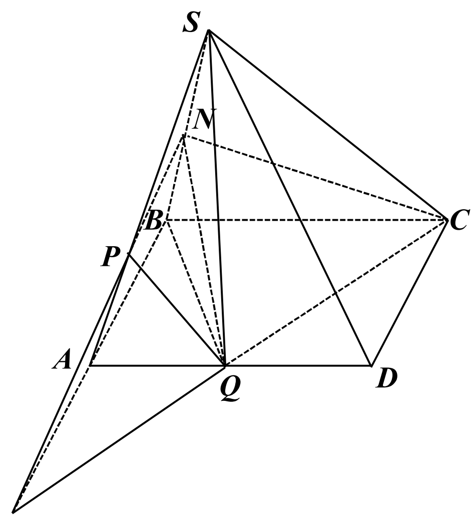
Vẽ bảng biến thiên $R_{\min}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

**Câu 2.** **(Thi Thử Cẩm Bình Cẩm Xuyên Hà Tĩnh 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi $N$ là trung điểm cạnh $SB$, $M$ là điểm đối xứng với $B$ qua $A$. Mặt phẳng $(MNC)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là $V_1$, $V_2$ với $V_1<V_2$ và $V$ là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V}$.

**A.** $\dfrac{7}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{24}$. **C.** $\dfrac{5}{24}$. **D.** $\dfrac{5}{12}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $P=MN\cap SA$, $Q=MC\cap AD$. Ta có thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(MNC)$ là tứ giác $CNPQ$. Dễ thấy $P$ là trọng tâm của tam giác $SBM$ và $Q$ là trung điểm của đoạn $AD$.
Gọi $V_0$ thể tích của phần chứa điểm $S$, $\mathscr{S}$ là diện tích của tứ giác $ABCD$ và $h$ chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.
Ta có
$V_0=V_{S.NPQ}+V_{S.NQC}+V_{S.QDC}$.
Mà
$V_{S.NPQ}=\dfrac{SP}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.V_{S.BAQ}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.S_{ABQ}.h=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{4}\mathscr{S}.h=\dfrac{1}{12}V$.

$V_{S.NQC}=\dfrac{SN}{SB}.V_{S.BQC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.S_{BQC}.h=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}\mathscr{S}.h=\dfrac{1}{4}V$.

$V_{S.QDC}=.\dfrac{1}{3}.S_{QDC}.h=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{4}\mathscr{S}.h=\dfrac{1}{4}V$.

Suy ra $V_0=\dfrac{1}{12}V+\dfrac{1}{4}V+\dfrac{1}{4}V=\dfrac{7}{12}V$.

Dẫn đến $V_2=\dfrac{7}{12}V$ và $V_1=V-V_2=\dfrac{5}{12}V$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{5}{12}$.

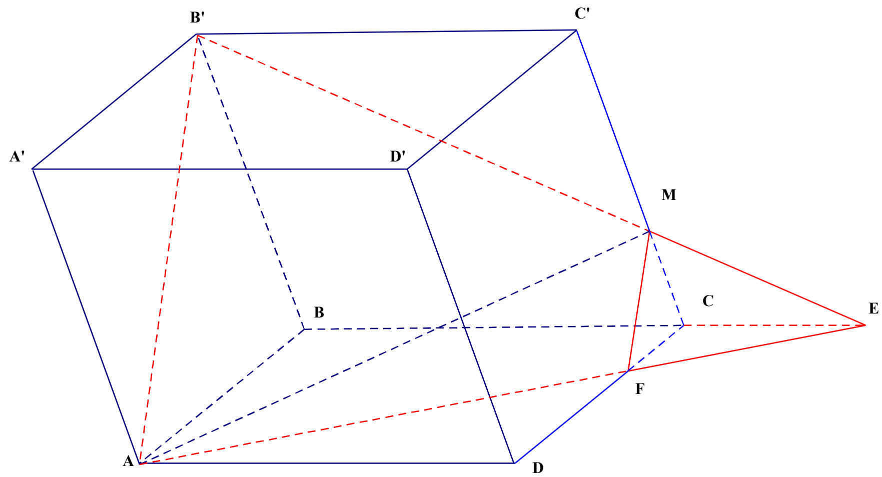
Nhận xét: kết quả này đúng cho hình chóp có đáy là hình bình hành.

**Câu 3.** Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, điểm $M$ thuộc cạnh $CC'$ sao cho $CC'=3CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối hộp thành hai khối đa diện. $V_1$ là thể tích khối đa diện chứa đỉnh $A'$, $V_2$ là thể tích khối đa diện chứa đỉnh $B$. Tính tỉ số thể tích $V_1$ và $V_2$.

**A.** $\frac{45}{13}$. **B.** $\frac{13}{5}$. **C.** $\frac{41}{13}$. **D.** $\frac{14}{13}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $E = B'M \cap BC, F = AE \cap DC$.

Gọi $V$ là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

$V = S_{ABB'A'}.d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)$

$V_{E.ABB'} = \frac{1}{3}.S_{ABB'}.d\left(E,\left(ABB'\right)\right) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.S_{ABB'A'}.\frac{3}{2}.d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right) = \frac{1}{4}V$.

$V_{E.FCM} = \frac{1}{3}.S_{FCM}.d\left(E,\left(FCM\right)\right) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{9}.S_{ABB'A'}.\frac{1}{2}.d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right) = \frac{1}{108}V$.

$V_2 = V_{E.ABB'} - V_{E.FCM} = \frac{13}{54}V$.

$V_1 = V - V_2 = \frac{41}{54}V$.

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{41}{13}$.

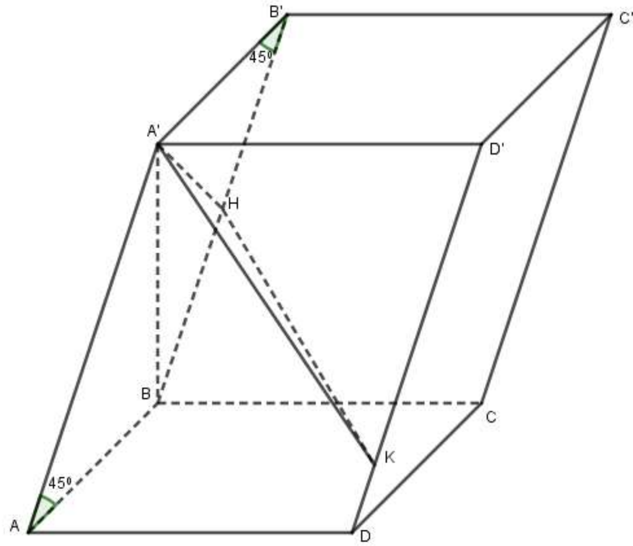
**Câu 4.** **(Chuyên Nguyễn Trãi-Hải Dương 18-19)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa $AA'$ và $(ABCD)$ bằng $45°$. Khoảng cách từ $A$ đến các đường thẳng $BB'$ và $DD'$ bằng $1$. Góc giữa mặt $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng $60°$. Thể tích khối hộp đã cho là

**A.** $3\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:**




Gọi $H$, $K$ lần lượt là các hình chiếu vuông góc của $A'$ trên các đường thẳng $BB'$ và $DD'$.

Ta có: $d\left(A;BB'\right)=d\left(A';BB'\right)=A'H=1$, $d\left(A;DD'\right)=d\left(A';DD'\right)=A'K=1$.

$$\begin{cases}\widehat{\left(AA',\left(ABCD\right)\right)}=45^\circ\\ A'B\perp\left(ABCD\right)\end{cases}\Rightarrow\ \widehat{A'AB}=45^\circ\quad\left(1\right).$$

$A'B\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow A'B\perp AB\quad\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta suy ra $\Delta A'AB$ là tam giác vuông cân tại $B\Rightarrow A'B=AB$

$\Rightarrow A'B=A'B'\Rightarrow H$ là trung điểm $BB'$.

Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng $\left(BB'C'C\right)$ và $\left(CC'D'D\right)$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $\left(AA'D'D\right)$ và $\left(BB'A'A\right)$ nên ta suy ra $\widehat{HA'K}=60^\circ$, mà $A'H=A'K=1$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow\ \Delta A'HK$ là tam giác đều $\Rightarrow S_{A'HK}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$A'H=1\Rightarrow BB'=2$.

Lại có: $\begin{cases}A'H\perp BB'\\ A'K\perp BB'\\ A'H\cap A'K=\left\{A'\right\}\end{cases}\Rightarrow BB'\perp\left(A'HK\right)$.

Do đó: $V_{A'B'D'.ABD}=BB'.S_{A'HK}=2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=2V_{A'B'D'.ABD}=2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

**Cách 2: (Võ Thanh Hải)**

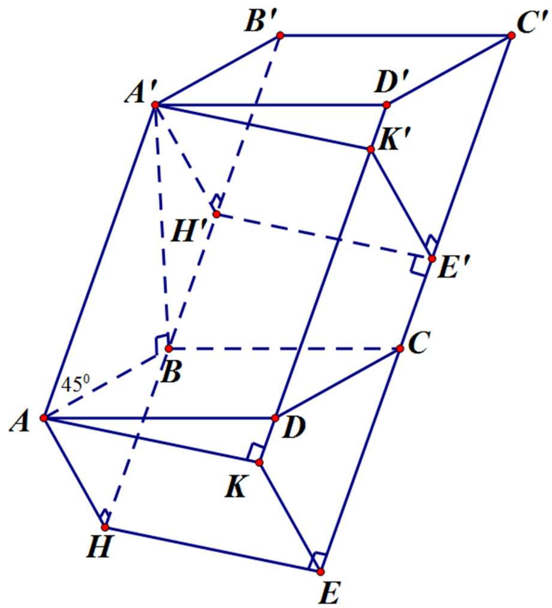
Với các giả thiết ta suy ra được $\Delta A'BB'$ vuông cân tại $A'$ và $BB'=2A'H=2$. Từ đây ta tính được $S_{ABB'A'}=A'H.BB'=2$.

*Vì $\begin{cases}A'H\perp BB'\\ A'K\perp BB'\ \left(\text{do } BB'//DD'\right)\end{cases}\Rightarrow BB'\perp\left(A'HK\right)\Rightarrow\left(ABB'A'\right)\perp\left(A'HK\right)$.

Ta có $\left(\widehat{(BB'C'C),(CC'D'D)}\right)=\left(\widehat{(AA'D'D),(BB'A'A)}\right)=\widehat{HA'K}=60^\circ$, mà $A'H=A'K=1$ nên suy ra $\Delta A'HK$ đều, do đó $d\left(D,(ABB'A')\right)=d\left(K,(ABB'A')\right)=d\left(K,A'H\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$*\,V_{ABCD.A'B'C'D'}=d\left(D,(ABB'A')\right).S_{ABB'A'}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.2=\sqrt{3}$.

**Cách 3: Lưu Thêm**




+) Gọi $H$, $K$ lần lượt là hình chiếu của $A$ trên $BB'$, $DD'$.
Gọi $H'$, $K'$ lần lượt là hình chiếu của $A'$ trên $BB'$, $DD'$.

+) Ta có $AH=AK=1$.

+) $\widehat{A'AB}=45^\circ$ nên $\Delta A'AB$ vuông cân tại $B$. Đặt $A'B=AB=x \Rightarrow AA'=x\sqrt{2}$.

+) Ta có $A'A.AB.\sin 45^\circ=A'H'.BB' \Leftrightarrow x\sqrt{2}.x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1.x\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{2} \Rightarrow AA'=2$.

+) $\left(\widehat{(BCC'B'),(CDD'C')}\right)=\left(\widehat{HE,KE}\right)=60^\circ=\varphi$.

+) $S_{AHEK}=AH.AK.\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

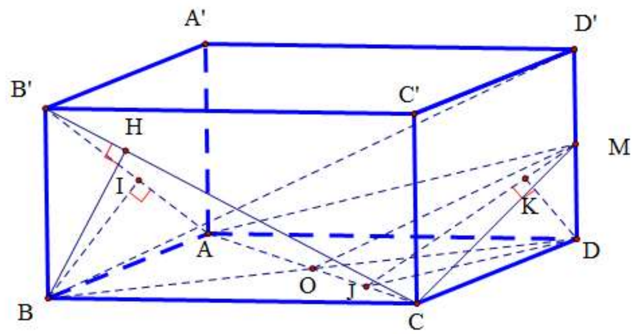
+) $V_{ABCD.A'B'C'D'}=V_{AHEK.A'H'E'K'}=AA'.S_{AHEK}=2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

**Câu 5.** **(TRƯỜNG THPT YÊN KHÁNH A)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$**.** Khoảng cách giữa $AB$ và $B'C$ là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa $BC$ và $AB'$ là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa $AC$ và $BD'$ là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối hộp đó là

**A.** $2a^3$. **B.** $a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $4a^3$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Đặt $AB = x$, $AD = y$, $AA' = z$.

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $B$ trên $B'C$, ta có $BH$ là đoạn vuông góc chung của $AB$ và $B'C$ nên $d(AB, B'C) = BH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4a^2}$. (1)

Gọi $I$ là hình chiếu vuông góc của $B$ trên $AB'$, ta có $BI$ là đoạn vuông góc chung của $BC$ và $AB'$ nên $d(BC, AB') = BI \Rightarrow \dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{5}{4a^2}$. (2)

Gọi $M$ là trung điểm của $DD'$, $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$, ta có mặt phẳng $(ACM)$ chứa $AC$ và song song với $BD'$ nên $d(AC, BD') = d(BD', (ACM)) = d(D', (ACM))$.

Gọi $J$ là hình chiếu vuông góc của $D$ trên $AC$, $K$ là hình chiếu vuông góc của $D$ trên $MJ$, ta có $d(D', (ACM)) = d(D, (ACM)) = DK \Rightarrow \dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{4}{z^2} = \dfrac{3}{a^2}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\dfrac{2}{z^2} = \dfrac{1}{2a^2} \Leftrightarrow z = 2a \Rightarrow x = y = a$.

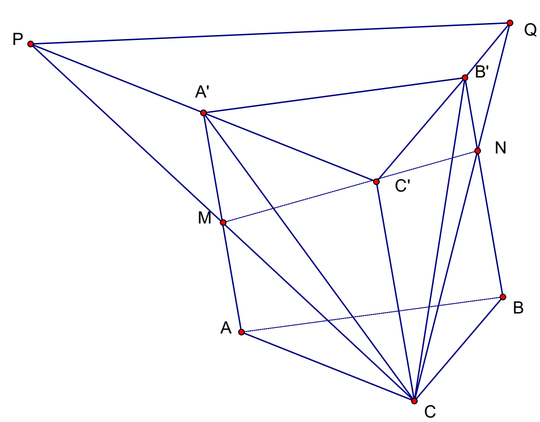
Thể tích khối hộp là $V = xyz = 2a^3$.

**Câu 6.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $2$. Gọi $M, N$ lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh $AA'$ và $BB'$ sao cho $M$ là trung điểm của $AA'$ và $BN = \dfrac{2}{3}BB'$. Đường thẳng $CM$ cắt đường thẳng $C'A'$ tại $P$ và đường thẳng $CN$ cắt đường thẳng $C'B'$ tại $Q$. Thể tích khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng

**A.** $\dfrac{13}{18}$. **B.** $\dfrac{7}{18}$. **C.** $\dfrac{7}{9}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta có: $\dfrac{QB'}{QC'}=\dfrac{B'N}{C'C}=\dfrac{B'N}{B'B}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{QC'}{B'C'}=\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{S_{\Delta PQC'}}{S_{\Delta A'B'C'}}=\dfrac{PC'}{A'C'}.\dfrac{QC'}{B'C'}=2.\dfrac{3}{2}=3\Rightarrow S_{\Delta PQC'}=3S_{\Delta A'B'C'}$

Đặt $h=d\left(C;\left(A'B'C'\right)\right)$.

$V_{C.C'PQ}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta PQC'}.h=\dfrac{1}{3}.3S_{\Delta A'B'C'}.h=S_{\Delta A'B'C'}.h=V_{ABC.A'B'C'}=2$

Mặt khác: $V_{C.ABB'A'}=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{4}{3}$.

$\dfrac{V_{C.ABNM}}{V_{C.ABB'A'}}=\dfrac{S_{ABNM}}{S_{ABB'A'}}=\dfrac{AM+BN}{AA'+BB'}=\dfrac{\frac{1}{2}AA'+\frac{2}{3}AA'}{AA'+AA'}=\dfrac{7}{12}\Rightarrow V_{C.ABNM}=\dfrac{7}{12}.V_{C.ABB'A'}=\dfrac{7}{12}.\dfrac{4}{3}=\dfrac{7}{9}$

Suy ra: $V_{CC'MNB'A'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{C.ABNM}=2-\dfrac{7}{9}=\dfrac{11}{9}$.

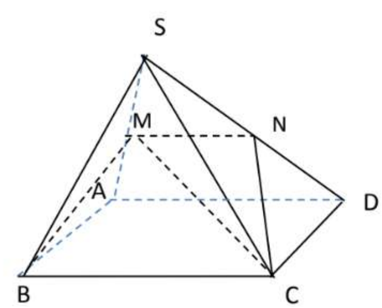
Vậy: $V_{A'MPB'NQ}=V_{C.PQC'}-V_{CC'MNB'A'}=2-\dfrac{11}{9}=\dfrac{7}{9}$.

**Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, trên cạnh $SA$ lấy điểm $M$ và đặt $\dfrac{SM}{SA}=x$. Giá trị $x$ để mặt phẳng $(MBC)$ chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau là:

**A.** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{3}$. **B.** $x=\dfrac{1}{2}$. **C.** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Ta có:

$\begin{cases}BC//(SAD)\\BC\subset(BMC)\end{cases}\Rightarrow(SAD)\cap(BMC)=MN//BC\Rightarrow\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SD}=x$.

$\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{2V_{S.MBC}}{V}=\dfrac{SM}{SA}=x$

$\dfrac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{2V_{S.MCN}}{V}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD}=x^2$

$\Rightarrow\dfrac{2\left(V_{S.MCN}+V_{S.MBC}\right)}{V}=x+x^2\Leftrightarrow\dfrac{2V_{S.MBCN}}{V}=x+x^2\Leftrightarrow\dfrac{V_{S.MBCN}}{V}=\dfrac{x+x^2}{2}\quad(1)$

Mặt phẳng $(MBC)$ chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau $\dfrac{V_{S.MNBC}}{V}=\dfrac{1}{2}\quad(2)$

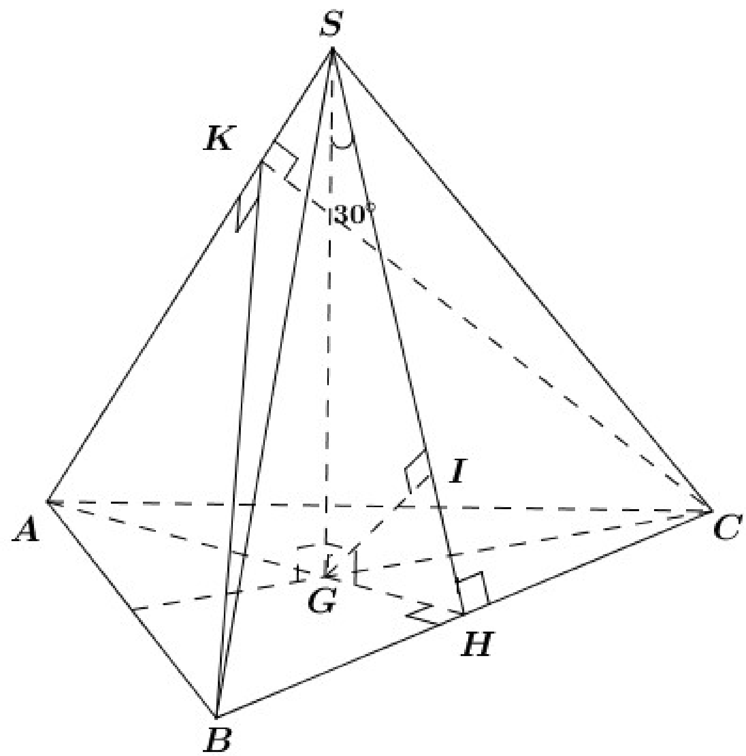
Từ $(1)$ và $(2)$ ta có: $1=x+x^2\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

**Câu 8.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, biết góc tạo bởi $SG$ và mặt phẳng $SBC$ bằng $30^0$. Mặt phẳng chứa $BC$ và vuông góc với $SA$ chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích $V_1$, $V_2$ trong đó $V_1$ chứa điểm $S$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

**A.** $\frac{6}{7}$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $\frac{1}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




*) Giả sử $AG \perp BC = H \Rightarrow BC \perp SH$. Ta có hình chiếu của $SG$ lên mặt phẳng $(SBC)$ trùng với $SH$. Do đó, $\left(\widehat{SG;(SBC)}\right) = \widehat{GSH} = 30^0$.

*) Hạ $BK \perp SA \Rightarrow SA \perp (BCK)$. Mặt phẳng chứa $BC$ và vuông góc với $SA$ tại $K$ là $(BCK)$ chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích $V_1$, $V_2$ trong đó $V_1$ chứa điểm $S$.

Suy ra, $V_1 = V_{S.KBC}$ ; $V_2 = V_{A.KBC} = V_{S.ABC} - V_1$.

Giả sử $\Delta ABC$ đều có cạnh bằng $1$. Ta có, $GH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ; $GB = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\Delta SGH$ vuông tại $H$ có $\widehat{GSH} = 30^0$ nên: $SG = \frac{GH}{\tan 30^0} = \frac{1}{2}$; $SH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lại có, $\Delta SGB$ vuông tại $G$ suy ra độ dài cạnh bên

$$SA = SB = \sqrt{SG^2 + GB^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Trong $\Delta SAB$ ta có $BK = \frac{2S_{\Delta SAB}}{SA}$ mà $\Delta SAB = \Delta SBC \Rightarrow S_{\Delta SAB} = S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SH.BC$

hay $BK=\dfrac{2.\dfrac{SH.BC}{2}}{SA}=\dfrac{SH.BC}{SA}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}.1}{\dfrac{\sqrt{21}}{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ .

Ta có, $AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{1-\dfrac{4}{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ và $SK=SA-AK=\dfrac{\sqrt{21}}{6}-\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{\sqrt{21}}{42}$ .

Ta có , $\dfrac{V_{S.KBC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{KS}{AS}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{21}}{42}}{\dfrac{\sqrt{21}}{6}}=\dfrac{1}{7}\Rightarrow V_{S.KBC}=\dfrac{1}{7}V_{S.ABC}$ và $V_{A.KBC}=\dfrac{6}{7}V_{S.ABC}$.

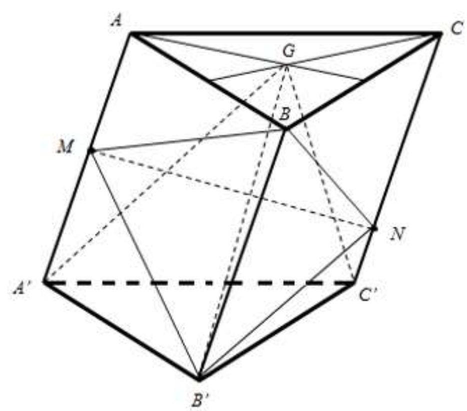
Vậy, $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\dfrac{1}{7}V_{S.ABC}}{\dfrac{6}{7}V_{S.ABC}}=\dfrac{1}{6}$.

**Câu 9.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]**Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi $M,N$ lần lượt thuộc các cạnh bên $AA',CC'$ sao cho $MA=MA'$ và $NC=4NC'$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

**A.** Khối $A'BCN$. **B.** Khối $ABB'C'$. **C.** Khối $BB'MN$. **D.** Khối $GA'B'C'$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Giả sử lăng trụ có thể tích là $V$ .

Thể tích khối tứ diện $GA'B'C'$ là: $V_1=\dfrac{1}{3}.S_{A'B'C'}.d\left(G,\left(A'B'C'\right)\right)=\dfrac{1}{3}V$.

Thể tích khối tứ diện $A'BCN$ là: $V_2=\dfrac{1}{3}.S_{BCN}.d\left(A',\left(BCN\right)\right)$.

Mặt khác: $V_{A'.BCC'B'}=V-V_{A'ABC}=\dfrac{2}{3}V$

$S_{BCN}=\dfrac{1}{2}CN.d\left(B,CC'\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{5}CC'.d\left(B,CC'\right)=\dfrac{4}{5}S_{BCC'}=\dfrac{2}{5}S_{BCC'B'}$.

Suy ra $V_2=\dfrac{2}{5}V_{A'BCC'B'}=\dfrac{2}{5}.\dfrac{2}{3}V=\dfrac{4}{15}V$ .

Thể tích khối tứ diện $ABB'C'$ là

$V_3=\dfrac{1}{3}.S_{BB'C'}.d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}S_{BCC'B'}.d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)=\dfrac{1}{2}.V_{A.BCC'B'}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V=\dfrac{1}{3}V$ .

Thể tích của khối tứ diện $BB'MN$ là $V_4 = \frac{1}{3}.S_{BB'N}.d\left(M,\left(BCC'B'\right)\right)$.

Mặt khác: $S_{BB'N} = \frac{1}{2}.BB'.d\left(N,BB'\right) = \frac{1}{2}.BB'.d\left(C,BB'\right) = S_{BB'C} = \frac{1}{2}S_{BCC'B'}$

Từ đó $V_4 = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}S_{BCC'B'}.d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V$.

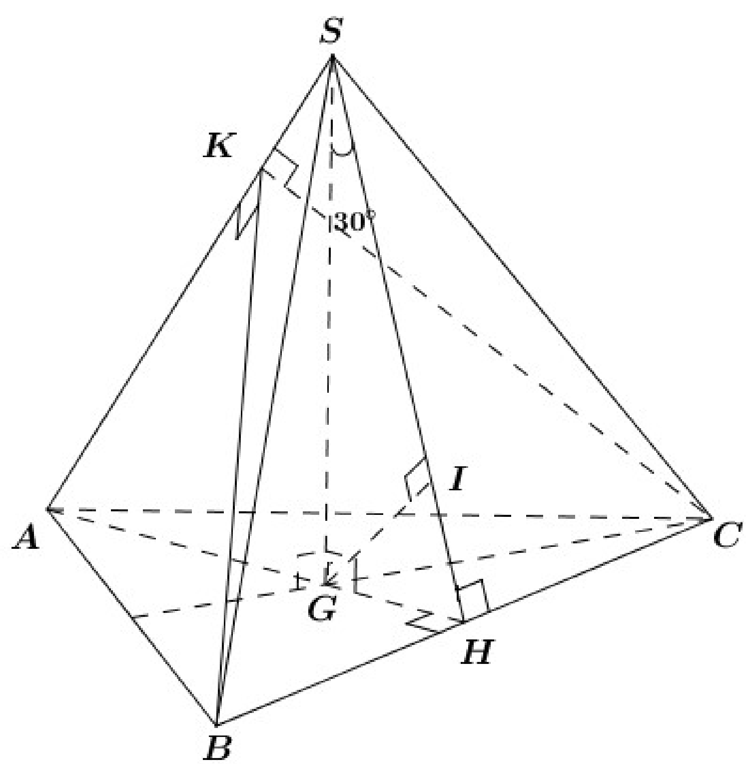
Vậy, thể tích của khối tứ diện $A'BCN$ là bé nhất.

**Câu 10.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, biết góc tạo bởi $SG$ và mặt phẳng $SBC$ bằng $30^0$. Mặt phẳng chứa $BC$ và vuông góc với $SA$ chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích $V_1$, $V_2$ trong đó $V_1$ chứa điểm $S$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

**A.** $7$. **B.** $\frac{6}{7}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn C**




*) Giả sử $AG \perp BC = H \Rightarrow BC \perp SH$. Ta có hình chiếu của $SG$ lên mặt phẳng $(SBC)$ trùng với $SH$. Do đó, $\left(\widehat{SG;(SBC)}\right) = \widehat{GSH} = 30^0$.

*) Hạ $BK \perp SA \Rightarrow SA \perp (BCK)$. Mặt phẳng chứa $BC$ và vuông góc với $SA$ tại $K$ là $(BCK)$ chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích $V_1$, $V_2$ trong đó $V_1$ chứa điểm $S$.

Suy ra, $V_1 = V_{S.KBC}$ ; $V_2 = V_{A.KBC} = V_{S.ABC} - V_1$.

Giả sử $\Delta ABC$ đều có cạnh bằng $1$. Ta có, $GH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ; $GB = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\Delta SGH$ vuông tại $H$ có $\widehat{GSH} = 30^0$ nên: $SG = \frac{GH}{\tan 30^0} = \frac{1}{2}$; $SH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lại có, $\Delta SGB$ vuông tại $G$ suy ra độ dài cạnh bên

$$SA = SB = \sqrt{SG^2 + GB^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Trong $\Delta SAB$ ta có $BK = \frac{2S_{\Delta SAB}}{SA}$ mà $\Delta SAB = \Delta SBC \Rightarrow S_{\Delta SAB} = S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SH.BC$

hay $BK = \frac{2.\frac{SH.BC}{2}}{SA} = \frac{SH.BC}{SA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}.1}{\frac{\sqrt{21}}{6}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Ta có, $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ và $SK = SA - AK = \frac{\sqrt{21}}{6} - \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{42}$.

Ta có, $\frac{V_{S.KBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{KS}{AS} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{42}}{\frac{\sqrt{21}}{6}} = \frac{1}{7} \Rightarrow V_{S.KBC} = \frac{1}{7}V_{S.ABC}$ và $V_{A.KBC} = \frac{6}{7}V_{S.ABC}$.

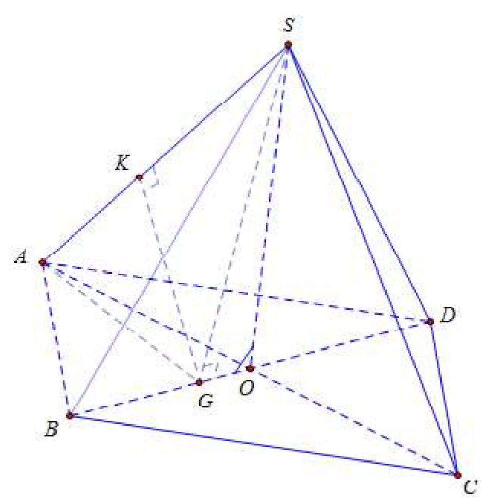
Vậy, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{7}V_{S.ABC}}{\frac{6}{7}V_{S.ABC}} = \frac{1}{6}$.

**Câu 11.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt đáy $(ABC)$ bằng $60^0$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $SA$ và $BC$ bằng $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$, tính theo $a$ thể tích $V$ của khối chóp $S.ABC$.

**A.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

**Lời giải:**

**Chọn D**




Gọi O là trung điểm AC, x là cạnh của tam giác đều, G là trọng tâm tam giác ABC.

+) Ta có $SO \perp AC$; $BO \perp AC$ nên góc giữa *(SAC)* và *(ABC)* là $\widehat{SOB} = 60^0$.

Vì SABC là chóp đều nên $SG \perp (ABC) \Rightarrow SG \perp GO$.

Xét tam giác vuông SAG có

$SG = \tan 60^0.OG = \sqrt{3}.\frac{1}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2}$

+) Từ A kẻ $AD//BC$ suy ra:
$d(BC;SA)=d(BC;(SAD))=d(B;(SAD))$.

Mặt khác ta có $d(G;(SAD)) = \frac{3}{4}d(B;(SAD))$ (*)

Vì $\widehat{BAD}=120^0$; $\widehat{BAG}=30^0 \Rightarrow \widehat{GAD}=90^0$
hay $AG\perp AD$ (1).
Lại có $SG\perp AD$ (2).
$\Rightarrow AD\perp(AGS)$.Kẻ $GK\perp SA$ (3) $\Rightarrow GK\perp AD$ (4) .
Từ (3) và (4) suy ra $GK\perp(SAD)\Rightarrow d(G;(SAD))=GK$ .
Do đó $d(G;(SAD))=GK$ .
Xét tam giác vuông $SGA$ ta có:

$$\frac{1}{GK^2}=\frac{1}{GA^2}+\frac{1}{GS^2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)}=\frac{7}{x^2}\Rightarrow GK=\frac{x\sqrt{7}}{7}$$

Từ (*) ta có $\frac{x\sqrt{7}}{7}=\frac{2}{3}\frac{3a\sqrt{7}}{14}\Rightarrow x=a$ . Vậy $SG=\frac{a}{2}$ và $S_{\triangle ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SG.S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

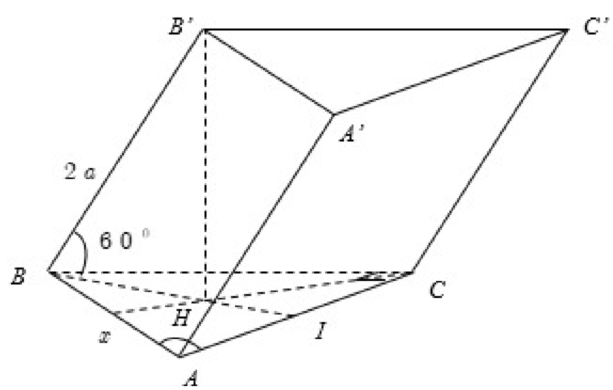
Chọn đáp án
D.

**Câu 12.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=2a$, tam giác $ABC$ vuông tại $C$ và $\widehat{BAC}=60^0$, góc giữa cạnh bên $BB'$ và mặt phẳng đáy $(ABC)$ bằng $60^0$. Hình chiếu vuông góc của $B'$ lên mặt phẳng $(ABC)$ trùng với trọng tâm của tam giác $ABC$. Tính thể tích của khối tứ diện $A'ABC$ theo $a$.

**A.** $\frac{3a^3}{26}$. **B.** $\frac{9a^3}{26}$. **C.** $\frac{27a^3}{208}$. **D.** $\frac{9a^3}{208}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $H$ là trọng tâm tam giác $ABC$, $I$ là trung điểm cạnh $AC$.
Theo giả thiết ta có: $B'H\perp(ABC) \Rightarrow (BB',(ABC))=\widehat{B'BH}=60^0$.
Trong tam giác vuông $B'BH$ có :

$B'H=BB'.\sin 60^0=2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

$BH=BB'.\cos 60^0=2a.\frac{1}{2}=a\Rightarrow BI=\frac{3}{2}BH=\frac{3a}{2}$.

Giả sử $AB = x, x > 0 \Rightarrow AC = AB.\cos\widehat{BAC} = x.\cos 60^0 = \frac{x}{2}$; $BC = AB.\sin 60^0 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác $ABI$, ta có

$BI^2 = AB^2 + AI^2 - 2AB.AI.\cos 60^0 \Leftrightarrow \frac{9a^2}{4} = x^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 - 2.x.\frac{x}{4}.\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{36a^2}{13}$

Diện tích tam giác $ABC$ là $S = \frac{1}{2}.CA.CB = \frac{1}{2}.\frac{x}{2}.\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2.\sqrt{3}}{8} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{26}$.

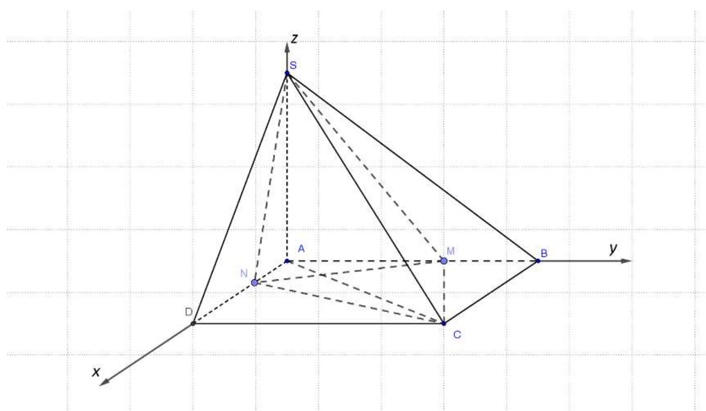
Vậy, thể tích khối tứ diện $A'ABC$ là: $V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.B'H = \frac{1}{3}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{26}.a\sqrt{3} = \frac{9a^3}{26}$.

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy. $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2$, $SA = 2$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$, $N$ lần lượt là hai điểm thay đổi trên hai cạnh $AB$, $AD$ $(AN < AM)$ sao cho mặt phẳng $(SMC)$ vuông góc với mặt phẳng $(SNC)$. Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $\frac{1}{AN^2} + \frac{16}{AM^2}$ bằng:

**A.** 5. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{17}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Đặt $AM = x,\ AN = y\ (0 < y < x < 2)$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ tương ứng như hình vẽ. Ta có: $A(0;0;0)$, $S(0;0;2)$, $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$ $C(2;2;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{SM} = (x;0;-2)$, $\overrightarrow{SC} = (2;2;-2)$, $\overrightarrow{SN} = (0;y;-2)$.

$\vec{n}_{(SMC)} = \left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right] = (4;2x-4;2x)$.

Lại có $\vec{n}_{(SNC)} = \left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{SC}\right] = (-2y+4;-4;-2y)$

Do $(SMC) \perp (SNC)$ nên $\vec{n}_{(SMC)}.\vec{n}_{(SNC)} = 0$

$\Leftrightarrow 4.(-2y+4) + (2x-4).(-4) + 2x.(-2y) = 0$.

$\Leftrightarrow 2x + 2y + xy - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + \frac{12}{y+2}\ \left(1 \le y < -2 + 2\sqrt{3}\right)$

Ta có $V_{S.AMNC} = \frac{1}{3}.S_{AMNC}.SA = \frac{1}{3}.(S_{AMN} + S_{CMN}).SA$.

Mà $SA = 2$, $S_{AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]\right| = \frac{x.y}{2}$, $S_{CMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right]\right| = \frac{2(x+y) - x.y}{2}$.

Suy ra $V_{S.AMNC}=\frac{1}{3}\left(\frac{xy}{2}+\frac{2(x+y)-xy}{2}\right).2=\frac{2}{3}(x+y)$.

Để $V_{S.AMNC}$ đạt giá trị lớn nhất thì $(x+y)$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét $P=x+y=y-2+\frac{12}{y+2}$

$\Leftrightarrow P=\frac{y^2+2y-y-4+12}{y+2}=\frac{y^2+y+8}{y+2}$.

$P'(y)=\frac{(y+2)(2y+1)-(y^2+y+8)}{(y+2)^2}$

$\Leftrightarrow P'(y)=\frac{2y^2+y+4y+2-y^2-y-8}{(y+2)^2}\Leftrightarrow P'(y)=\frac{y^2+4y-6}{(y+2)^2}$.

$\Rightarrow P'(y)=0\Leftrightarrow y^2+4y-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2+\sqrt{10}\\ y=-2-\sqrt{10}\end{array}\right.$.

So điều kiện ta nhận $y=-2+\sqrt{10}\Rightarrow x=2+2\sqrt{10}$.

$\Rightarrow \underset{\left[1;-2+2\sqrt{3}\right)}{Max}P(y)=P(1)=11\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$ (thỏa yêu cầu đề bài).

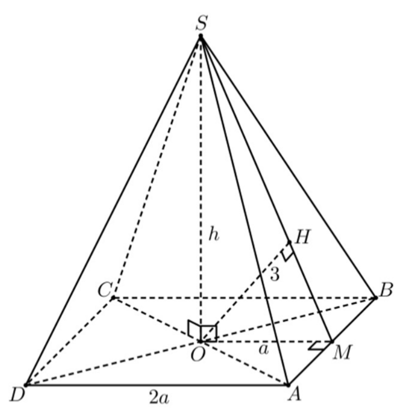
Vậy $\frac{1}{y^2}+\frac{16}{x^2}=5$.

**Câu 14.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đỉnh $S$, khoảng cách từ điểm $C$ đến mặt phẳng $(SAB)$ bằng 6. Gọi $V$ là thể tích khối chóp $S.ABCD$, tính giá trị nhỏ nhất của $V$.

**A.** $18\sqrt{3}$. **B.** $54\sqrt{3}$. **C.** $64\sqrt{3}$. **D.** $27\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$, $M$ là trung điểm $AB$.
Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Ngoài ra, $CO$ cắt $(SAB)$ tại $A$ nên $\frac{d(O;(SAB))}{d(C;(SAB))}=\frac{AO}{AC}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d(O;(SAB))=\frac{1}{2}\cdot d(C;(SAB))=\frac{6}{2}=3$.

Ta có: $\begin{cases}AB\perp SO\ \ (SO\perp(ABCD))\\ AB\perp OM\ \ (OM//AD)\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SOM)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SOM)$,

mà $(SAB) \cap (SOM) = SM$,

trong $(SOM)$, kẻ $OH \perp SM$ tại $H$

Suy ra $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O;(SAB)) = 3$.

Đặt $AD = 2a$, $SO = h$ $(a,\ h > 0)$.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\Delta SOM$ vuông tại $O$ có $SO = h$, $OM = a$, $OH = 3$, ta được:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{9}$$

Mà $V = V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{h.(2a)^2}{3} = \dfrac{4}{3}a^2h \Rightarrow a^2h = \dfrac{3}{4}V$.

Áp dụng BĐT *Cauchy* cho 3 số dương: $\dfrac{1}{h^2}$, $\dfrac{1}{2a^2}$, $\dfrac{1}{2a^2}$, ta được:

$$\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{2a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4a^4h^2}} \Rightarrow \sqrt[3]{4a^4h^2} \geq 27 \Rightarrow 4\left(a^2h\right)^2 \geq 27^3$$

$$\Rightarrow a^2h \geq \sqrt{\frac{27^3}{4}} \Rightarrow \frac{3}{4}V \geq \frac{81\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V \geq 54\sqrt{3}.$$

$$V = 54\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{2a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{27} \\ \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{2}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 3\sqrt{3} \\ a = \dfrac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

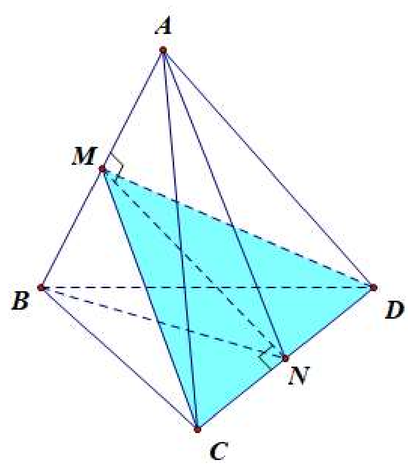
Vậy $V_{\min} = 54\sqrt{3}$.

**Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, $AC = AD = CB = DB = 2\sqrt{3}$, khoảng cách giữa $AB$, $CD$ bằng 1. Tìm $x$ để khối tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

**A.** $x = \sqrt{22}$. **B.** $x = \sqrt{13}$. **C.** $x = \sqrt{26}$. **D.** $x = \sqrt{11}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$ và $CD$.

$\Delta ACD$ cân tại $A$ (vì $AC = AD$) nên $AN \perp CD$.

$\Delta BCD$ cân tại $B$ (vì $BD = BC$) nên $BN \perp CD$.

Suy ra $CD \perp (ABN) \Rightarrow MN \perp CD$.

Tương tự, ta cũng có $MN \perp AB$. Do đó $MN$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $AB$ và $CD$ suy ra $d(AB, CD) = MN = 1$.

$\Delta CMD$ cân tại $M$ cho $MC^2 = MD^2 = BC^2 - MB^2 = 12 - \dfrac{x^2}{4}$.

Và $MN^2 = \dfrac{2(MC^2 + MD^2) - CD^2}{4} \Rightarrow CD = \sqrt{44 - x^2}$.

Mà $V_{ABCD} = 2V_{A.MCD} = 2.\dfrac{1}{3}S_{\Delta MCD}.AM = \dfrac{1}{3}.MN.CD.AM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{x}{2}\sqrt{44 - x^2} = \dfrac{1}{6}x\sqrt{44 - x^2}$.

Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có $x\sqrt{44 - x^2} \le \dfrac{x^2 + \left(\sqrt{44 - x^2}\right)^2}{2} = 22$.

Suy ra $V_{ABCD} \le \dfrac{1}{6}.22 = \dfrac{11}{3} \Rightarrow \max(V_{ABCD}) = \dfrac{11}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{44 - x^2} \Rightarrow x = \sqrt{22}$.

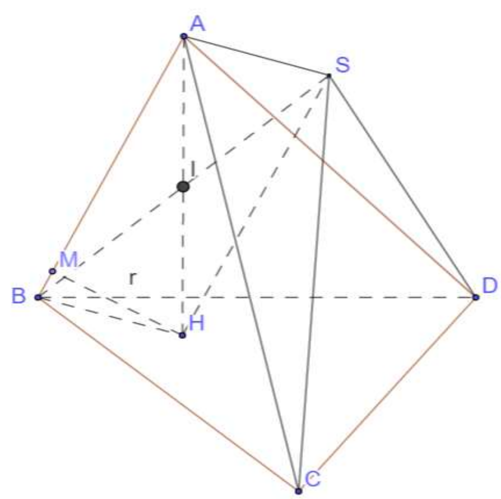
Vậy khi $x = \sqrt{22}$ thì thể tích khối chóp $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 16.** Cho tứ diện $ABCD$ có hình chiếu của $A$ lên mặt phẳng $(\text{BCD})$ là $H$ nằm trong tam giác $BCD$. Biết rằng $H$ cũng là tâm của một mặt cầu bán kính $\sqrt{3}$ và tiếp xúc các cạnh $AB, AC, AD$. Dựng hình bình hành $AHBS$. Tính giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$

**A.** $3$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu của H lên AB,AC,AD ta có

HM=HN=HP=$\sqrt{3}$ ⇒AM=AN=AP ⇒ AH ⊥ (MNP) ⇒ (MNP) || (BCD) ⇒ $AB = AC = AD$

( AH là trục đường tròn ΔMNP )

Vậy A thuộc trục đường tròn ngoại tiếp Δ BCD

AH là trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta$ BCD .

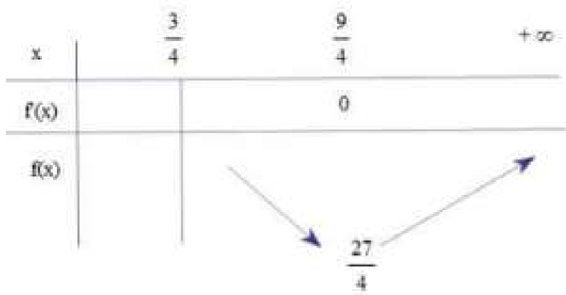
Gọi $I=AH\bigcap BS \Rightarrow IB=IC=ID=IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.BCD

$$IH = x \Rightarrow \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HA^2} \Rightarrow HB^2 = \frac{12x^2}{4x^2-3}$$

$$\Delta HBI \perp tai H : BI^2 = HB^2 + HI^2 = \frac{4x^4+9x^2}{4x^2-3}$$

$$t = x^2 \Rightarrow f(t) = \frac{4t^2+9t}{4t-3}(t > \frac{3}{4}) \Rightarrow f'(t) = \frac{16t^2-24t-27}{(4t-3)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{9}{4}(n) \vee t = -\frac{3}{4}(l)$$



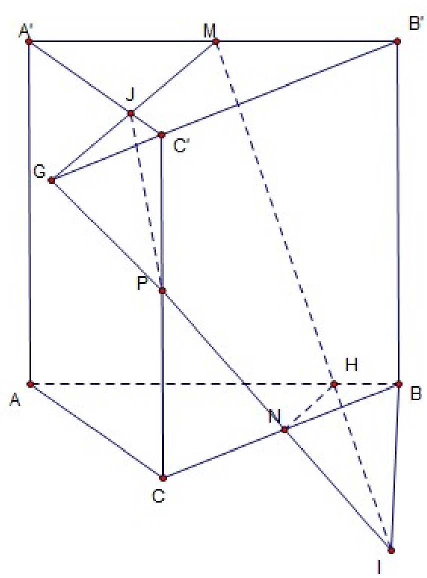

Vẽ bảng biến thiên $R_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

**Câu 17.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $A'B'$, $BC$, $CC'$. Mặt phẳng $(MNP)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm $B$ gọi là $V_1$. Gọi $V$ là thể tích khối lăng trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

**A.** $\frac{49}{144}$. **B.** $\frac{95}{144}$. **C.** $\frac{73}{144}$. **D.** $\frac{49}{95}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $I = NP \cap BB', G = NP \cap B'C', J = MG \cap A'C', H = IM \cap AB.$

Ta có $\frac{IH}{IM}=\frac{IN}{IG}=\frac{IB}{IB'}=\frac{1}{3}$, $\frac{GC'}{GB'}=\frac{GP}{GI}=\frac{1}{3},\frac{GJ}{GM}=\frac{1}{2}$

Ta có $V_{I.B'MG}=\frac{1}{3}d\left(I,\left(B'MG\right)\right).S_{B'MG}=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}d\left(B,\left(B'MG\right)\right).\frac{1}{2}.d\left(G,B'M\right).B'M$

$=\frac{3}{8}d\left(B,\left(B'MG\right)\right).\frac{1}{2}d\left(G,B'M\right).B'A'=\frac{3}{8}V$.

$\frac{V_{I.BHN}}{V_{I.B'MG}}=\frac{IB}{IB'}.\frac{IH}{IM}.\frac{IN}{IG}=\frac{1}{27}\Rightarrow V_{I.BHN}=\frac{1}{27}V_{I.B'MG}=\frac{1}{72}V$,

$\frac{V_{G.C'JP}}{V_{G.B'MI}}=\frac{GC'}{GB'}.\frac{GJ}{GM}.\frac{GP}{GI}=\frac{1}{18}\Rightarrow V_{G.C'JP}=\frac{1}{18}V_{I.B'MG}=\frac{1}{48}V$.

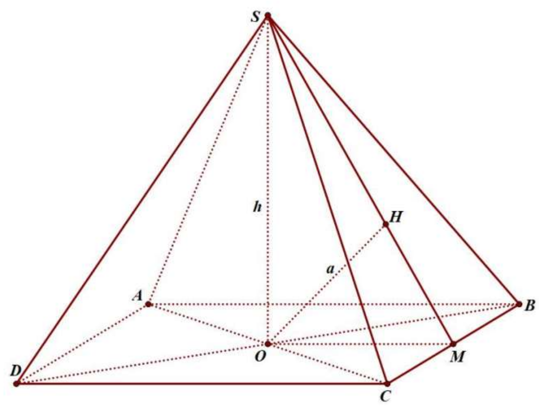
Khi đó $V_1=V_{I.B'MG}-V_{I.BHN}-V_{G.C'JP}=\frac{3}{8}V-\frac{1}{48}V-\frac{1}{72}V=\frac{49}{144}V\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\frac{49}{144}$

**Câu 18.** **(Thi Thử Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1. 2018-2019)** Trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ $A$ đến $mp\left(SBC\right)$ bằng $2a$, khối chóp có thể tích nhỏ nhất bằng

**A.** $3\sqrt{3}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $2a^3$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $O$ là tâm của mặt đáy, $M$ là trung điểm cạnh $BC$.
Dễ thấy do $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SO\perp ABCD$.
Gọi $H$ là chân đường vuông góc hạ từ $O$ xuống $SM$ trong mp$\left(SMO\right)\Rightarrow OH\perp SM$. (1)

Hơn nữa, $OM\perp BC$ và $SM\perp BC\Rightarrow BC\perp\left(SOM\right)\Rightarrow OH\perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow d\left(O;\left(SBC\right)\right)=OH$.

Do $O$ là trung điểm cạnh $AC$ nên $d\left(A;\left(SBC\right)\right)=2d\left(O;\left(SBC\right)\right)=2OH$.

Theo giả thiết $d\left(A;\left(SBC\right)\right)=2a\Rightarrow OH=a$.

Giả sử chiều dài cạnh đáy là $2x$ ($x>a$ do $OM>OH$) và $SO=h$ ($h>0$).
Trong tam giác vuông $SOM$

$OH^2=\frac{h^2x^2}{h^2+x^2}\Rightarrow a^2=\frac{h^2x^2}{h^2+x^2}\Rightarrow h^2\left(x^2-a^2\right)=a^2x^2\Rightarrow h^2=\frac{a^2x^2}{x^2-a^2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V=\frac{1}{3}h.\left(4x^2\right)\Leftrightarrow V^2=\frac{16}{9}h^2x^4\Leftrightarrow V^2=\frac{16}{9}\frac{a^2x^2}{x^2-a^2}x^4\Leftrightarrow V^2=\frac{16a^2}{9}\frac{x^6}{x^2-a^2}$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{16a^2}{9}\frac{x^6}{x^2-a^2}$ trên khoảng $\left(a;+\infty\right)$, ta có:

$$f'(x)=\frac{16a^2}{9}\frac{4x^7-6x^5a^2}{\left(x^2-a^2\right)^2}=\frac{16a^2}{9}.\frac{2x^5\left(2x^2-3a^2\right)}{\left(x^2-a^2\right)^2};\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}a\end{array}\right.$$

Ta có BBT:

| $x$ | $a$ | | $\sqrt{\frac{3}{2}}a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $12a^6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

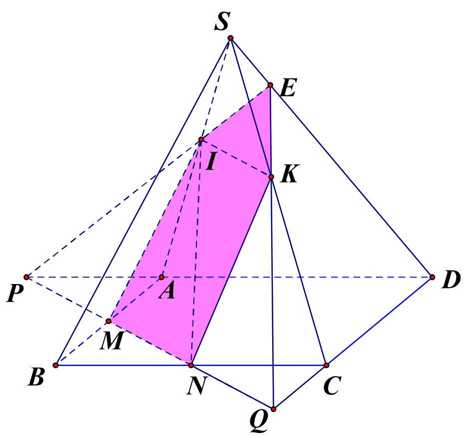
Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $12a^6$ nên khối chóp có thể tích nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}a^3$.

**Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $BC$. Điểm $I$ thuộc đoạn $SA$. Biết mặt phẳng $(MNI)$ chia khối chọp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh $S$ có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k=\frac{IA}{IS}$?

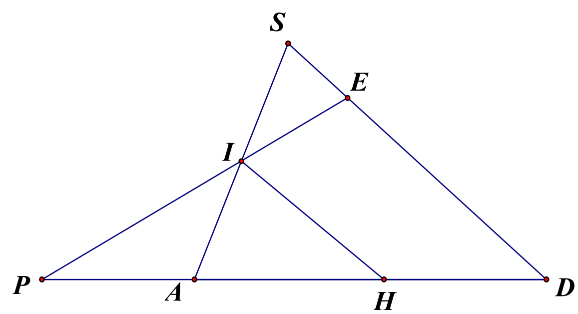
**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**



Hình 1



Hình 2

Mặt phẳng $(MNI)$ cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1. Đặt $V_{S.ABCD}=V$.

Ta có $S_{\Delta APM}=S_{\Delta BMN}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{8}S_{ABCD}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APM}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{8}$.

$$\frac{d\left(I,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\frac{IA}{SA}=\frac{k}{k+1}.$$

$$\Rightarrow\frac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}}=\frac{S_{\Delta APM}}{S_{ABCD}}.\frac{d\left(I,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\frac{k}{8(k+1)}\Rightarrow V_{I.APM}=\frac{k}{8(k+1)}V.$$

Do $MN//AC\Rightarrow IK//AC\Rightarrow IK//(ABCD)\Rightarrow d\left(I;(ABCD)\right)=d\left(K;(ABCD)\right)$.

Mà $S_{\Delta APM}=S_{\Delta NCQ}.\Rightarrow V_{I.APM}=V_{K.NCQ}=\frac{k}{8(k+1)}V$.

Kẻ $IH//SD$ ($H\in SD$) như hình 2. Ta có :

$\dfrac{IH}{SD}=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{AI}{AS}=\dfrac{k}{k+1}$.

$\dfrac{IH}{ED}=\dfrac{PH}{PD}=\dfrac{PA}{PD}+\dfrac{AH}{PD}=\dfrac{PA}{PD}+\dfrac{2AH}{3AD}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2k}{3(k+1)}=\dfrac{3k+1}{3(k+1)}$.

$\Rightarrow \dfrac{ED}{SD}=\dfrac{IH}{SD}:\dfrac{ID}{ED}=\dfrac{3k}{3k+1}\Rightarrow \dfrac{d(E,(ABCD))}{d(S,(ABCD))}=\dfrac{ED}{SD}=\dfrac{3k}{3k+1}$.

$\dfrac{S_{\Delta PQD}}{S_{ABCD}}=\dfrac{9}{8}\Rightarrow \dfrac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{27k}{24k+8}\Rightarrow V_{E.PQD}=\dfrac{27k}{24k+8}V$.

$V_{EIKAMNCD}=\dfrac{13}{20}V \Leftrightarrow V_{E.PDC}-V_{I.APM}-V_{K.NQC}=\dfrac{13}{20}V$

$\Leftrightarrow \dfrac{27k}{8(3k+1)}V-\dfrac{k}{8(k+1)}V-\dfrac{k}{8(k+1)}V=\dfrac{13}{20}V$

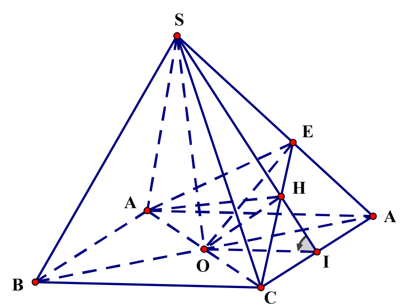
$\Leftrightarrow \dfrac{27k}{2(3k+1)}-\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{13}{5}\Leftrightarrow k=\dfrac{2}{3}$

**Câu 20.** **(SGD Nam Định_Lần 1_2018-2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng $(P)$ chứa đường thẳng $AC$ và vuông góc với mặt phẳng $(SCD)$, cắt đường thẳng $SD$ tại $E$. Gọi $V$ và $V_1$ lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABCD$ và $D.ACE$, biết $V=5V_1$. Tính côsin của góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $O$ tâm hình vuông $ABCD\Rightarrow$ tứ diện $OSCD$ có $OS,OC,OD$ đôi một vuông góc.

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ lên mặt phẳng $(SCD)\Rightarrow H$ là trực tâm $\Delta SCD$.

Nối $C$ với $H$ cắt $SD$ tại một điểm, điểm đó là $E$ và $(P)=(ACE)$.

$V_1=\dfrac{1}{5}V\Rightarrow V_1=\dfrac{2}{5}V_{S.ACD}=\dfrac{2}{5}V_{D.ACS}\Rightarrow DE=\dfrac{2}{5}DS\Rightarrow SE=\dfrac{3}{5}DS.$

Đặt: $SD=5a,(a>0)$ suy ra $DE=2a,SE=3a$.

Vì $AC\perp(SBD)\Rightarrow SD\perp AC$ và $SD\perp CE$ nên $SD\perp(ACE)$.

Gọi $I$ là giao điểm của $SH$ với $CD\Rightarrow SI\perp CD,OI\perp CD$ và $I$ là trung điểm của $CD$.

Gọi $\varphi$ là góc giữa $(SCD)$ và $(ABCD)\Rightarrow\varphi=\widehat{SIO}$.

Trong tam giác $SOD$ vuông tại $O$, $OE$ là đường cao

$\Rightarrow\begin{cases}OD^2=ED.SD=10a^2\\SO^2=SE.SD=15a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}OD=a\sqrt{10}\\SO=a\sqrt{15}\end{cases}\Rightarrow CD=2a\sqrt{5}.$

Do đó $OI=\dfrac{1}{2}CD=a\sqrt{5}$ và $SI=2a\sqrt{5}\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{OI}{SI}=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 21.** Cho tứ diện $SABC$ có trọng tâm là $G$. Một mặt phẳng qua $G$ cắt các tia $SA, SB$ và $SC$ theo thứ tự tại $A', B', C'$. Đặt $\frac{SA'}{SA} = m, \frac{SB'}{SB} = n, \frac{SC'}{SC} = p$. Đẳng thức nào sau đây đúng

**A.** $\frac{1}{mn} + \frac{1}{np} + \frac{1}{pm} = 4$.

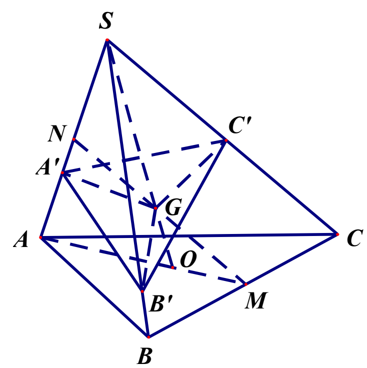
**B.** $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 4$.

**C.** $m + n + p = 4$.

**D.** $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = 1$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm các cạnh $BC, SA$, $O$ là trọng tâm tam giác $ABC$.Khi đó, ta có: $\{G\} = SO \cap MN$.

Xét tam giác $SAM$ có: $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SM}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SM}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SM}\right)$

và $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SM}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{SG} \Rightarrow \frac{SG}{SO} = \frac{3}{4}$.

Ta có: $\frac{V_{SA'GC'}}{V_{SAOC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SG}{SO} \cdot \frac{SC'}{SC} = m.\frac{3}{4}.p \Rightarrow V_{SA'GC'} = \frac{3}{4}mnp.\frac{V_{SAOC}}{n}$ (1)

$\frac{V_{SA'GB'}}{V_{SAOB}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SG}{SO} \cdot \frac{SB'}{SB} = m.\frac{3}{4}.n \Rightarrow V_{SA'GB'} = \frac{3}{4}mnp.\frac{V_{SAOB}}{p}$ (2)

$\frac{V_{SB'GC'}}{V_{SBOC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SG}{SO} \cdot \frac{SC'}{SC} = n.\frac{3}{4}.p \Rightarrow V_{SB'GC'} = \frac{3}{4}mnp.\frac{V_{SBOC}}{m}$ (3)

Cộng (1),(2),(3) vế theo vế ta được:

$$V_{SA'B'C'} = \frac{3}{4}mnp\left(\frac{1}{n}.V_{SAOC} + \frac{1}{p}.V_{SAOB} + \frac{1}{m}.V_{SBOC}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{3}{4}mnp\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{V_{SAOC}}{V_{SABC}} + \frac{1}{p} \cdot \frac{V_{SAOB}}{V_{SABC}} + \frac{1}{m} \cdot \frac{V_{SBOC}}{V_{SABC}}\right)$$

$$\Leftrightarrow mnp = \frac{3}{4}mnp\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} + \frac{1}{p} \cdot \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} + \frac{1}{m} \cdot \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} = \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{d(O;AC)}{d(B;AC)} + \frac{1}{p} \cdot \frac{d(O;AB)}{d(C;AB)} + \frac{1}{m} \cdot \frac{d(O;BC)}{d(A;BC)}\right] \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 4.$$

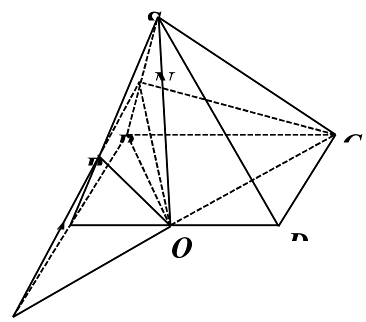
**Bình luận:** Nếu làm trắc nghiệm, ta chọn mp qua $G$ và cắt $SA, SB, SC$ là mp $(NBC)$,ta có ngay đáp án: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 4$.

**Câu 22.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi $N$ là trung điểm cạnh $SB$, $M$ là điểm đối xứng với $B$ qua $A$. Mặt phẳng $(MNC)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích lần lượt là $V_1$, $V_2$ với $V_1 < V_2$ và $V$ là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$.

**A.** $\frac{7}{24}$. **B.** $\frac{5}{24}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{7}{12}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $P = MN \cap SA$, $Q = MC \cap AD$. Ta có thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(MNC)$ là tứ giác $CNPQ$. Dễ thấy $P$ là trọng tâm của tam giác $SBM$ và $Q$ là trung điểm của đoạn $AD$.

Gọi $V_0$ thể tích của phần chứa điểm $S$, $\mathscr{S}$ là diện tích của tứ giác $ABCD$ và $h$ chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

Ta có

$V_0 = V_{S.NPQ} + V_{S.NQC} + V_{S.QDC}$.

Mà

$V_{S.NPQ} = \frac{SP}{SA}.\frac{SN}{SB}.V_{S.BAQ} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.S_{ABQ}.h = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}\mathscr{S}.h = \frac{1}{12}V$.

$V_{S.NQC} = \frac{SN}{SB}.V_{S.BQC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.S_{BQC}.h = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\mathscr{S}.h = \frac{1}{4}V$.

$V_{S.QDC} = .\frac{1}{3}.S_{QDC}.h = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}\mathscr{S}.h = \frac{1}{4}V$.

Suy ra $V_0 = \frac{1}{12}V + \frac{1}{4}V + \frac{1}{4}V = \frac{7}{12}V$.

Dẫn đến $V_2 = \frac{7}{12}V$ và $V_1 = V - V_2 = \frac{5}{12}V$.

Vậy $\frac{V_1}{V} = \frac{5}{12}$.

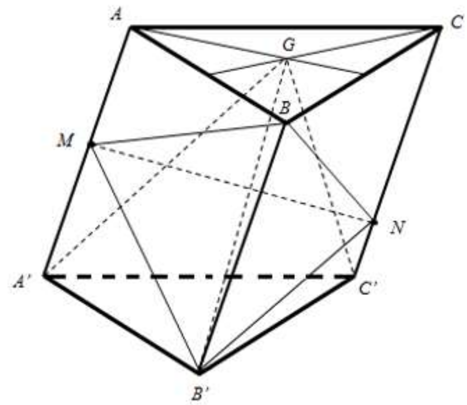
Nhận xét: kết quả này đúng cho hình chóp có đáy là hình bình hành.

**Câu 23.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]**Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi $M, N$ lần lượt thuộc các cạnh bên $AA', CC'$ sao cho $MA = MA'$ và $NC = 4NC'$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Trong bốn khối tứ diện $GA'B'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

**A.** Khối $ABB'C'$. **B.** Khối $BB'MN$. **C.** Khối $GA'B'C'$. **D.** Khối $A'BCN$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Giả sử lăng trụ có thể tích là $V$ .

Thể tích khối tứ diện $GA'B'C'$ là: $V_1 = \frac{1}{3}.S_{A'B'C'}.d\left(G,\left(A'B'C'\right)\right) = \frac{1}{3}V$.

Thể tích khối tứ diện $A'BCN$ là: $V_2 = \frac{1}{3}.S_{BCN}.d\left(A',\left(BCN\right)\right)$.

Mặt khác: $V_{A'.BCC'B'} = V - V_{A'ABC} = \frac{2}{3}V$

$S_{BCN} = \frac{1}{2}CN.d\left(B,CC'\right) = \frac{1}{2}.\frac{4}{5}CC'.d\left(B,CC'\right) = \frac{4}{5}S_{BCC'} = \frac{2}{5}S_{BCC'B'}$.

Suy ra $V_2 = \frac{2}{5}V_{A'BCC'B'} = \frac{2}{5}.\frac{2}{3}V = \frac{4}{15}V$ .

Thể tích khối tứ diện $ABB'C'$ là

$V_3 = \frac{1}{3}.S_{BB'C'}.d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}S_{BCC'B'}.d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right) = \frac{1}{2}.V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V$ .

Thể tích của khối tứ diện $BB'MN$ là $V_4 = \frac{1}{3}.S_{BB'N}.d\left(M,\left(BCC'B'\right)\right)$.

Mặt khác: $S_{BB'N} = \frac{1}{2}.BB'.d\left(N,BB'\right) = \frac{1}{2}.BB'.d\left(C,BB'\right) = S_{BB'C} = \frac{1}{2}S_{BCC'B'}$

Từ đó $V_4 = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}S_{BCC'B'}.d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V$ .

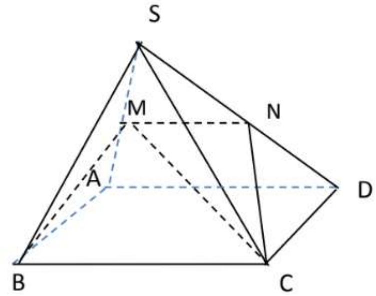
Vậy, thể tích của khối tứ diện $A'BCN$ là bé nhất.

**Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, trên cạnh $SA$ lấy điểm $M$ và đặt $\frac{SM}{SA} = x$. Giá trị $x$ để mặt phẳng $(MBC)$ chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau là:

**A.** $x = \frac{1}{2}$. **B.** $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $x = \frac{\sqrt{5}-1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Ta có:

$\begin{cases} BC//(SAD) \\ BC \subset (BMC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (BMC) = MN//BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SD} = x$.

$\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{2V_{S.MBC}}{V} = \dfrac{SM}{SA} = x$

$\dfrac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{2V_{S.MCN}}{V} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SD} = x^2$

$\Rightarrow \dfrac{2(V_{S.MCN} + V_{S.MBC})}{V} = x + x^2 \Leftrightarrow \dfrac{2V_{S.MBCN}}{V} = x + x^2 \Leftrightarrow \dfrac{V_{S.MBCN}}{V} = \dfrac{x + x^2}{2}$ $(1)$

Mặt phẳng $(MBC)$ chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau $\dfrac{V_{S.MNBC}}{V} = \dfrac{1}{2}$ $(2)$

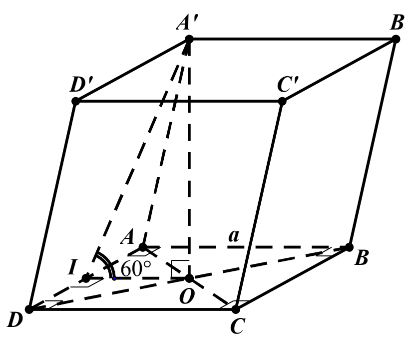
Từ $(1)$ và $(2)$ ta có: $1 = x + x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

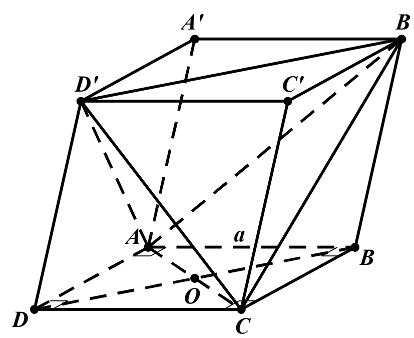
**Câu 25.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của $A'$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của $AC$ và $BD$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

**A.** $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $O = AC \cap BD$ và $I$ là trung điểm của $AD$.

Ta có $(ADD'A') \cap (ABCD) = AD$, $OI \perp AD$ và $A'O \perp (ABCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ là $\widehat{A'IO} = 60°$.

Tam giác $A'IO$ vuông tại $O$ nên $A'O = IO \tan \widehat{A'IO} = \dfrac{a}{2} \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = AB.AD.A'O = a.a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{2}$.

Dễ thấy $V_{CC'B'D'} = V_{B'ABC} = V_{AA'B'D'} = V_{D'ACD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DC\cdot A'O = \frac{1}{6}\cdot a\sqrt{3}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Vậy thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ là

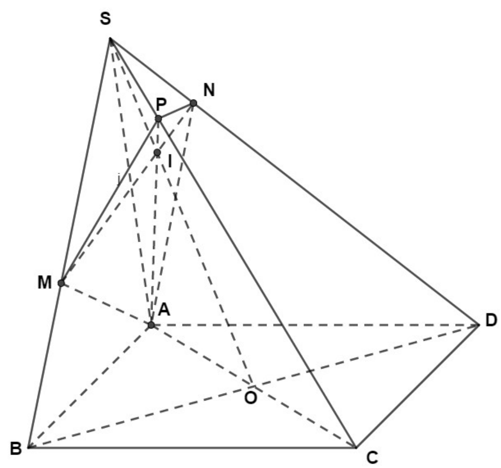
$$V_{ACB'D'} = V - V_{CC'B'D'} - V_{B'ABC} - V_{AA'B'D'} - V_{D'ACD} = V - 4V_{D'ACD} = \frac{3a^3}{2} - 4\cdot\frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{2}.$$

**Câu 26.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là $V$. Gọi $P$ là điểm trên cạnh $SC$ sao cho $SC = 5SP$. Một mặt phẳng $(\alpha)$ qua $AP$ cắt hai cạnh $SB$ và $SD$ lần lượt tại $M$ và $N$. Gọi $V_1$ là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$.

**A.** $\frac{2}{15}$. **B.** $\frac{1}{15}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{3}{25}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.APN} + V_{S.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.APN}}{2V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.APM}}{2V_{S.ABC}} = \frac{1}{2}\left(\frac{SP}{SC}.\frac{SN}{SD} + \frac{SP}{SC}.\frac{SM}{SB}\right)$

$= \frac{1}{10}\left(\frac{SN}{SD} + \frac{SM}{SB}\right)$. Đặt $a = \frac{SM}{SB}$, $b = \frac{SN}{SD}$ , $0 < a, b \le 1$.

Gọi $O$ là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

Trong mặt phẳng $(SAC)$, $AP \cap SO = I$.

Xét tam giác $SOC$ có $\frac{PS}{PC}.\frac{AC}{AO}.\frac{IO}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{IO}{IS} = 2 \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3}$.

Xét tam giác $SBD$ có $\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD} = a.b$.

Mặt khác, $\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{S_{SMI} + S_{SNI}}{S_{SBD}} = \frac{S_{SMI}}{2S_{SBO}} + \frac{S_{SNI}}{2S_{SDO}} = \frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SI}{SO} + \frac{SN}{SD}.\frac{SI}{SO}\right) = \frac{1}{6}(a+b)$

Vậy, $\frac{1}{6}(a+b) = ab$, do $a = \frac{1}{6}$ không thoả mãn hệ thức nên $b = \frac{a}{6a-1}$, do $0 < b \le 1$ nên

$0 < \frac{a}{6a-1} \le 1 \Leftrightarrow a \ge \frac{1}{5}$. Từ đó, $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{10}(a+b) = \frac{1}{10}\left(a + \frac{a}{6a-1}\right)$ với $\frac{1}{5} \le a \le 1$.

Xét hàm số $y = f(x) = x + \dfrac{x}{6x-1}$ với $x \in \left[\dfrac{1}{5};1\right]$. $y' = 1 - \dfrac{1}{(6x-1)^2}$,

$y' = 0 \Leftrightarrow (6x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 (1) \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$. Ta có $f\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{6}{5}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$, $f(1) = \dfrac{6}{5}$. Vậy

$\max\limits_{x \in \left[\frac{1}{5};1\right]} f(x) = f(1) = \dfrac{6}{5}$.

Từ đó, giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V}$ bằng $\dfrac{3}{25}$ khi $M$ trùng $B$ hoặc $N$ trùng $D$.

**Cách 2: Lưu Thêm**

* Đặt $a = \dfrac{SA}{SA} = 1$; $b = \dfrac{SB}{SM}$; $c = \dfrac{SC}{SP} = 5$; $d = \dfrac{SD}{SN}$.

* Ta có $a + c = b + d \Leftrightarrow 1 + 5 = b + d \Leftrightarrow d = 6 - b$.

* $\dfrac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{a+b+c+d}{4abcd} = \dfrac{1+b+5+6-b}{4.1.b.5.(6-b)} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{-b^2+6b}$.

* Xét $f(b) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{-b^2+6b}; b \in [1;5]$ (do $b$, $d \ge 1$).

$f'(b) = -\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{-2b+6}{(-b^2+6b)^2}$; $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = 3$.

Bảng biến thiên:

| $b$ | $1$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(b)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(b)$ | $\dfrac{3}{25}$ | $\searrow$ | $\dfrac{1}{15}$ | $\nearrow$ | $\dfrac{3}{25}$ |

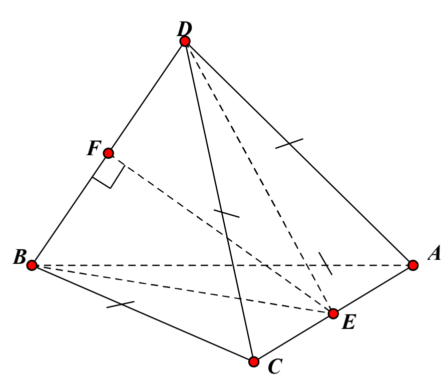
Kết luận: Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{3}{25}$.

**Câu 27.** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = CD = DA = 1$ và $AC, BD$ thay đổi. Thể tích tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$.

**Lời giải**

**Chọn B**



Đặt $AC = x, BD = y \ \ (x, y > 0)$.

Gọi $E, F$ lần lượt là trung điểm $AC, BD$.

$\Delta ABC = \Delta DBC \ (c.c.c) \Rightarrow DE = BE \Rightarrow EF \perp BD$. Chứng minh tương tự: $EF \perp AC$.

Suy ra $EF$ là đoạn vuông góc chung của $AC, BD$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp EF \\ AC \perp BE \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BED)$.

$V_{ABCD} = 2V_{ABDE} = 2.\dfrac{1}{3}AE.S_{\Delta BED} = \dfrac{2}{3}AE.EF.BF = \dfrac{2}{3}.\dfrac{x}{2}.\dfrac{y}{2}.EF \qquad (1)$.

Trong $\Delta BEF : EF^2 = BE^2 - BF^2 = 1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4}$.

Ta có:

$$V_{ABCD}^2 = \frac{1}{144}.x^2.y^2.\left(4 - x^2 - y^2\right) \le \frac{1}{144}\left(\frac{x^2 + y^2 + \left(4 - x^2 - y^2\right)}{}\right)^3 = \frac{4}{243} \Leftrightarrow \max V_{ABCD} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

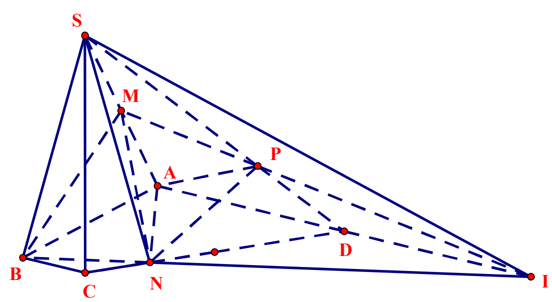
Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = y^2 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

**Câu 28.** **(Sở GD- ĐT Quảng Nam)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1, đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy lớn là $AD$ và $AD = 3BC$. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $SA, N$ là điểm thuộc cạnh $CD$ sao cho $ND = 3NC$. Mặt phẳng $(BMN)$ cắt cạnh $SD$ tại $P$. Thể tích khối chóp $A.MBNP$ bằng

**A.** $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{12}$. **C.** $\dfrac{5}{16}$. **D.** $\dfrac{9}{32}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Đặt $V = V_{S.ABCD} = 1$.

Gọi $I$ là giao điểm của $BN$ với $AD$, suy ra $P$ là giao điểm của $MI$ với $SD$.

$BC \parallel DI$ và $ND = 3NC \Rightarrow DI = 3BC \Rightarrow D$ là trung điểm của $AI$.

Do đó $P$ là trọng tâm của tam giác $SAI \Rightarrow \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{2}{3}$.

$S_{BCN} = \dfrac{1}{4}S_{BCD} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{1}{16}S_{ABCD}$ ; $S_{ADN} = S_{NID} = 9S_{BCN} = \dfrac{9}{16}S_{ABCD}$.

$S_{ABN} = S_{ABCD} - S_{BCN} - S_{ADN} = \dfrac{3}{8}S_{ABCD}$. Suy ra $V_{S.ABN} = \dfrac{3}{8}V$; $V_{S.ADN} = \dfrac{9}{16}V$ .

$V_{S.MBN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABN} \Rightarrow V_{A.BMN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABN} = \dfrac{3}{16}V$;

$V_{S.MNP} = \dfrac{1}{2}V_{S.ANP} \Rightarrow V_{A.MNP} = \dfrac{1}{2}V_{S.ANP} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{S.AND} = \dfrac{3}{16}V$ .

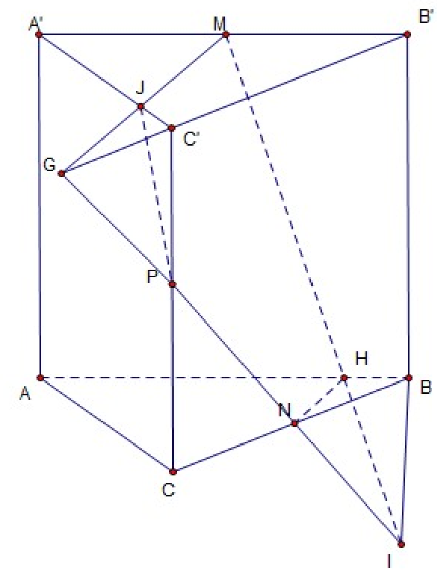
Do đó $V_{A.MBNP}=V_{A.BMN}+V_{A.MNP}=\frac{3}{8}V=\frac{3}{8}$.

**Câu 29.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $A'B'$, $BC$, $CC'$. Mặt phẳng $(MNP)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm $B$ gọi là $V_1$. Gọi $V$ là thể tích khối lăng trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

**A.** $\frac{49}{144}$. **B.** $\frac{95}{144}$. **C.** $\frac{73}{144}$. **D.** $\frac{49}{95}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $I=NP\cap BB'$, $G=NP\cap B'C'$, $J=MG\cap A'C'$, $H=IM\cap AB$.

Ta có $\frac{IH}{IM}=\frac{IN}{IG}=\frac{IB}{IB'}=\frac{1}{3}$, $\frac{GC'}{GB'}=\frac{GP}{GI}=\frac{1}{3},\frac{GJ}{GM}=\frac{1}{2}$

Ta có $V_{I.B'MG}=\frac{1}{3}d\left(I,\left(B'MG\right)\right).S_{B'MG}=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}d\left(B,\left(B'MG\right)\right).\frac{1}{2}.d\left(G,B'M\right).B'M$

$=\frac{3}{8}d\left(B,\left(B'MG\right)\right).\frac{1}{2}d\left(G,B'M\right).B'A'=\frac{3}{8}V$.

$\frac{V_{I.BHN}}{V_{I.B'MG}}=\frac{IB}{IB'}.\frac{IH}{IM}.\frac{IN}{IG}=\frac{1}{27}\Rightarrow V_{I.BHN}=\frac{1}{27}V_{I.B'MG}=\frac{1}{72}V$,

$\frac{V_{G.C'JP}}{V_{G.B'MI}}=\frac{GC'}{GB'}.\frac{GJ}{GM}.\frac{GP}{GI}=\frac{1}{18}\Rightarrow V_{G.C'JP}=\frac{1}{18}V_{I.B'MG}=\frac{1}{48}V$.

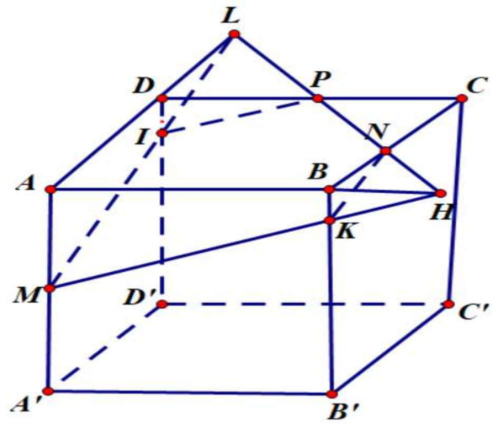
Khi đó $V_1=V_{I.B'MG}-V_{I.BHN}-V_{G.C'JP}=\frac{3}{8}V-\frac{1}{48}V-\frac{1}{72}V=\frac{49}{144}V\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\frac{49}{144}$

**Câu 30.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AA'$, $BC$, $CD$. Mặt phẳng $(MNP)$ chia khối hộp thành hai phần có thể tích là $V_1,V_2$. Gọi $V_1$ là thể tích phần chứa điểm **C,** Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

**A.** $\frac{119}{425}$. **B.** $\frac{119}{25}$. **C.** $\frac{113}{24}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

Chọn B




Gọi $NP \cap AB = H; NP \cap AD = L; ML \cap D'D = I; MH \cap B'B = K.$

Mặt phẳng $(MNP)$ cắt lập phương được ngũ giác $KNPIM$

Khi đó ta có $\Delta HBN = \Delta NCP = \Delta PDL(\text{g.c.g}) \Rightarrow \text{HN} = \text{PL} = \frac{HL}{3}; \frac{HB}{HA} = \frac{HN}{HL} = \frac{1}{3}; \frac{KB}{MA} = \frac{DI}{MA} = \frac{1}{3}.$

Suy ra $V_2 = V(IBAMK) + V(IABNPD) + V(IKNB) = \frac{1}{3}S_{ABKM}.AD + \frac{1}{3}ID.S_{ABNPD} + \frac{1}{3}DC.S_{BKN}.$

$\frac{S_{ABKM}}{S_{ABB'A'}} = \frac{BK + AM}{2AA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{ABKM} = \frac{1}{3}.S_{ABB'A'}$

$S_{ABNPD} = S_{ABCD} - S_{CNP} = \frac{7}{8}S_{ABCD}$

$S_{KBN} = \frac{1}{24}S_{BCC'B'}$

Đặc biệt hóa khối hộp chữ nhật là khối lập phương ta suy ra

$V_2 = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{ABB'A'}.AD + \frac{1}{3}.\frac{\text{DD}'}{6}\frac{7}{8}S_{ABCD} + \frac{1}{3}DC.\frac{1}{24}S_{BCB'C'} = \frac{25}{144}V.$

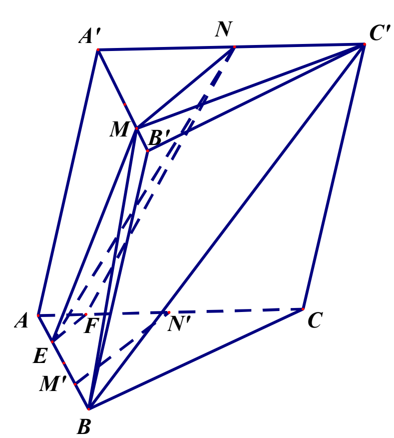
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{119}{25}.$

**Câu 31.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $V$.Các điểm $M, N, E$ lần lượt là nằm trên các cạnh $A'B', A'C', AB$ sao cho $MA' = 3MB', NA' = NC', EB = 3EA$.Mặt phẳng $(MNE)$ cắt $AC$ tại $F$. Thể tích khối đa diện lồi $BEFCC'MN$ bằng

**A.** $\frac{3}{8}V$. **B.** $\frac{41}{72}V$. **C.** $\frac{53}{72}V$. **D.** $\frac{5}{24}V$.

**Lời giải**

Chọn C



Ta có: $\left(ABC\right)//\left(A'B'C'\right)$

Mà $\left(MNE\right)\cap\left(A'B'C'\right)=MN;\left(MNE\right)\cap\left(ABC\right)=EF\Rightarrow EF//MN$.

Do đó hình đa diện $A'MNAEF$ là hình chóp cụt.

Gọi $h$ là chiều cao khối lăng trụ, $S$ là diện tích đáy của hình lăng trụ.

Ta có: $\dfrac{S_{A'MN}}{S_{A'B'C'}}=\dfrac{A'M}{A'B'}.\dfrac{A'N}{A'C'}=\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2}\Rightarrow S_{A'MN}=\dfrac{3}{8}S$.

$\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{AE}{AB}.\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{24}\Rightarrow S_{AEF}=\dfrac{1}{24}S$.

Thể tích hình chóp cụt $A'MNAEF$ là

$$V_{A'MN.AEF}=\frac{1}{3}\left(S_{A'MN}+S_{AEF}+\sqrt{S_{A'MN}.S_{AEF}}\right).h=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}S+\frac{1}{24}S+\sqrt{\frac{3}{8}S.\frac{1}{24}S}\right).h=\frac{13}{72}S.h=\frac{13}{72}V.$$

Ta lại có: $\dfrac{S_{B'C'M}}{S_{B'C'A'}}=\dfrac{B'C'}{B'C'}.\dfrac{B'M}{B'A'}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow S_{B'C'M}=\dfrac{1}{4}S$

Thể tích khối chóp $B.B'C'M$ là: $V_{B.B'C'M}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{4}S.h=\dfrac{1}{12}V$.

Thể tích khối đa diện $BEFCC'MN$ là: $V-\left(\dfrac{13}{73}V+\dfrac{1}{12}V\right)=\dfrac{53}{72}V$.

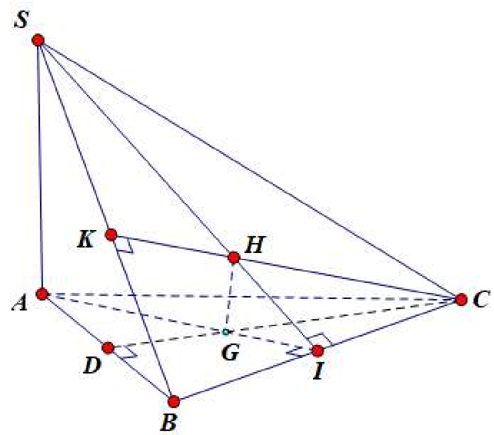
**------------- HẾT -------------**

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$, đường thẳng $d$ đi qua $A$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Gọi $S$ là điểm thay đổi trên đường thẳng $d$, $H$ là trực tâm tam giác $SBC$. Biết rằng khi điểm $S$ thay đổi trên đường thẳng $d$ thì điểm $H$ nằm trên đường tròn $(C)$. Trong số các mặt cầu chứa đường tròn $(C)$, bán kính mặt cầu nhỏ nhất là

**A.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $a$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $G$ là trực tâm của tam giác $ABC$.

Ta có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp GH$ (1). $DC \perp (SAB) \Rightarrow DC \perp SB$

$$\left.\begin{array}{l} SB \perp KC \\ SB \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow SB \perp (CDK) \Rightarrow SB \perp GH \quad (2)$$

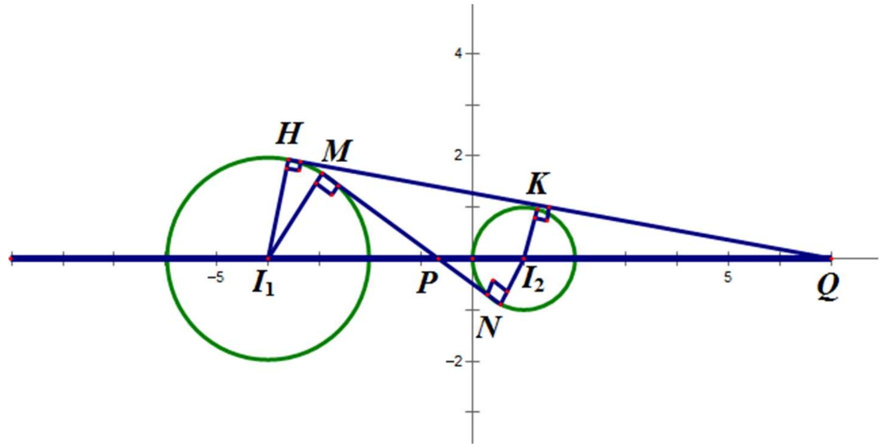
(1), (2) suy ra $GH \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{GHI} = 90^o \Rightarrow H$ thuộc mặt cầu đường kính $GI$ và thuộc mặt phẳng cố định $(SAI)$ nên $H$ thuộc đường tròn $(C)$ là giao của mặt cầu đường kính $GI$ và mặt phẳng $(SAI)$. Dễ nhận thấy trong các mặt cầu chứa $(C)$, mặt cầu đường kính $GI$ là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, suy ra $H$ nằm trên đường tròn đường kính $GI$ nằm trong $(SAI)$. $\Rightarrow R_{\min} = \frac{GI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

**Câu 2.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_1)$ có tâm $I_1(1;0;1)$, bán kính $R_1 = 2$ và mặt cầu $(S_2)$ có tâm $I_2 = (1;3;5)$, bán kính $R_2 = 1$. Đường thẳng $d$ thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với $(S_1)$, $(S_2)$ lần lượt tại $A$ và $B$. Gọi $M, m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn $AB$. Tính $P = M.m$.

**A.** $P = 8\sqrt{6}$. **B.** $P = 8\sqrt{5}$. **C.** $P = 4\sqrt{5}$. **D.** $P = 2\sqrt{6}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Ta có : $I_1I_2 = 5 > R_1 + R_2 = 3$.

Gọi $P, Q$ lần lượt là tâm vị tự trong và ngoài của hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ . Qua $P$ và $Q$ lần lượt kẻ hai tiếp tuyến chung với hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ là $MN$ và $HK$ với $M, N, H, K$ là các tiếp điểm của tiếp tuyến $d$ với hai mặt cầu.

Khi đó $AB_{\min} = MN$, $AB_{\max} = HK$ .

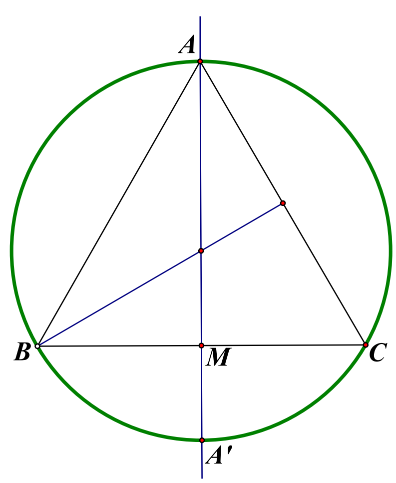
Ta có: $\frac{PN}{PM} = \frac{PI_2}{PI_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} PN = \frac{1}{2}PM \\ PI_2 = \frac{1}{2}PI_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PI_1 = \frac{10}{3} \\ PI_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PN = \frac{4}{3} \\ PM = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow MN = MP + PN = 4$.

Ta có: $\frac{QI_2}{QI_1} = \frac{QK}{QH} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} QI_2 = \frac{1}{2}QI_1 \\ QK = \frac{1}{2}QH \end{cases} \Rightarrow QI_2 = I_1I_2 = 5$.

Ta có: $QH = \sqrt{I_1Q^2 - R_1^{\ 2}} = \sqrt{10^2 - 2^2} = 4\sqrt{6} \Rightarrow HK = 2\sqrt{6}$.

Do đó : $M.m = HK.MN = 2\sqrt{6}.4 = 8\sqrt{6}$ .

**Câu 3.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Cho tam giác đều $ABC$ có đỉnh $A(5;5)$ nội tiếp đường tròn tâm $I$ đường kính $AA'$, $M$ là trung điểm $BC$. Khi quay tam giác $ABM$ cùng với nửa hình tròn đường kính $AA'$ xung quanh đường thẳng $AM$ (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là $V_1$ và $V_2$.




Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

**A.** $\dfrac{9}{32}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{27}{32}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi độ dài cạnh của tam giác $ABC$ là $a$.

Khi đó khối nón tạo thành có bán kính đáy là: $r = BM = \dfrac{a}{2}$; chiều cao $h = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối nón là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}.\pi.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$

Khối cầu tạo thành có bán kính là $R = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích khối cầu là: $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}.\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$

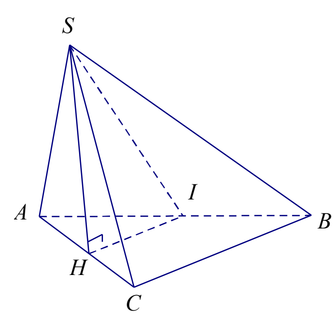
Suy ra: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24} : \dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27} = \dfrac{9}{32}$.

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a, BC = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng $(SAC)$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Tính diện tích xung quanh của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

**A.** $\dfrac{15\pi a^2}{7}$. **B.** $\dfrac{12\pi a^2}{7}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^2}{7}$. **D.** $\dfrac{3\pi a^2}{7}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $H$ là trung điểm của $AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Gọi $I$ là trung điểm của $AB \Rightarrow HI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Tam giác $SAB$ đều cạnh $a \Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$SH = \sqrt{SI^2 - HI^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

$AC = 2AH = 2\sqrt{SA^2 - SH^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{3}$

Gọi $r_b, r_d$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác $SAC, ABC$

Gọi $R$ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$S_{\Delta SAC} = \dfrac{1}{2}SH.AC = \dfrac{a^2\sqrt{35}}{12} \Rightarrow r_b = \dfrac{SA.SC.AC}{4S_{\Delta SAC}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Theo công thức Hê-rông: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{6}\Rightarrow r_d=\dfrac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

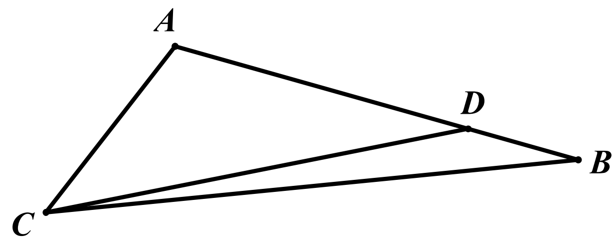
$R=\sqrt{{r_b}^2+{r_d}^2-\dfrac{AC^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ Vậy: $S_{mc}=4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{7}\right)^2=\dfrac{12\pi a^2}{7}$

**Câu 5.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Trong không gian cho tam giác $ABC$ có $AB=2R, AC=R, \widehat{CAB}=120^0$. Gọi $M$ là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm $B$, bán kính $R$. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là

**A.** $4R$. **B.** $6R$. **C.** $R\sqrt{19}$. **D.** $2R\sqrt{7}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Ta có $MA^2=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)^2=\left(\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}^2\right)=\left(\dfrac{BA}{MB}\overrightarrow{MB}+\dfrac{MB}{BA}\overrightarrow{BA}\right)^2=\left(2\overrightarrow{MB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)^2$.

$\Rightarrow MA^2=\left|2\overrightarrow{MB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right|^2\Rightarrow MA=2\left|\overrightarrow{MB}+\dfrac{\overrightarrow{BA}}{4}\right|$.

Gọi $D$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD}=\dfrac{\overrightarrow{BA}}{4}$, khi đó $MA=2\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right|=2\left|\overrightarrow{MD}\right|=2MD$.

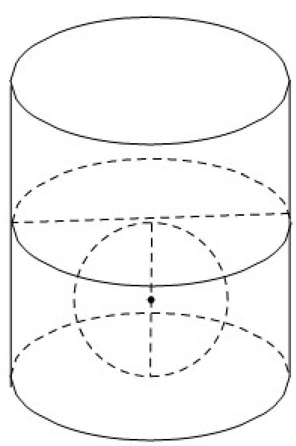
Do đó $MA+2MC=2\left(MC+MD\right)\geq 2CD$.

Lại có $CD^2=AC^2+AD^2-2AC.AD\cos 120°=\dfrac{19}{4}R^2\Rightarrow CD=R\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $M$ là giao điểm của đoạn $CD$ với mặt cầu tâm $B$ bán kính $R$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+2MC$ là $R\sqrt{19}$.

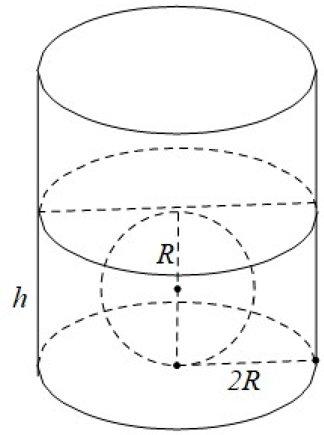
**Câu 6.** **(Thi Thử Cẩm Bình Cẩm Xuyên Hà Tĩnh 2019)** Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính $2,7cm$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ dưới). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4cm$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5cm$. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là?



**A.** $5,6cm$. **B.** $5,5cm$. **C.** $5,4cm$. **D.** $5,7cm$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $R = 2,7cm$ là bán kính của viên bi. Ta có bán kính phần trong đáy cốc là $2R$.

Thể tích nước ban đầu là: $V_1 = \pi(2R)^2.4,5 = 18\pi R^2$.

Thể tích viên bi là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích nước sau khi thả viên bi là: $V = V_1 + V_2 = 18\pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right)$.

Gọi $h$ là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi vào.

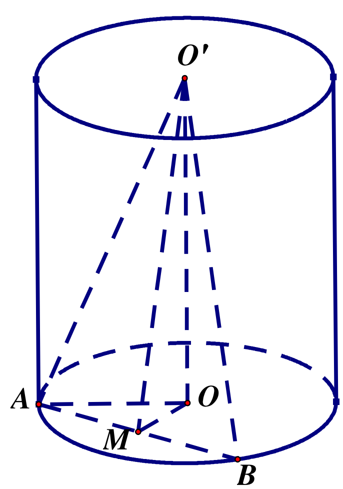
Ta có: $V = 2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right) = \pi(2R)^2.h \Rightarrow h = \dfrac{2\pi R^2\left(9 + \frac{2}{3}R\right)}{\pi(2R)^2} = \dfrac{\left(9 + \frac{2}{3}R\right)}{2} = 5.4(cm)$.

**Câu 7.** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. $AB$ là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ một góc $60°$. Tính theo $R$ thể tích $V$ của khối trụ đã cho.

**A.** $V = \dfrac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. **B.** $V = \dfrac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **C.** $V = \dfrac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **D.** $V = \dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

**Lời giải**

**Chọn D**



Đặt độ dài cạnh $AB = x\ \left(x > 0\right)$ và $M$ là trung điểm $AB$.

Vì tam giác $O'AB$ đều nên $O'A = O'B = AB = x \Rightarrow O'M = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Vì mặt phẳng $\left(O'AB\right)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $\left(O;R\right)$ góc $60°$ nên $\widehat{O'MO} = 60°$.

Xét tam giác $O'OM$ vuông tại $O$ ta có: $\cos\widehat{O'MO} = \dfrac{OM}{O'M}$. Suy ra

$$\cos 60° = \frac{OM}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OM = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

Xét tam giác $OAM$ vuông ở $M$ có: $OA^2 = OM^2 + AM^2$ nên

$$R^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{7}{16}x^2 \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{7}}{7}R$$

Do đó: $O'M = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}R$ và $OM = \dfrac{x\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}R$. Vì vậy, ta có

$$OO' = \sqrt{O'M^2 - OM^2} = \frac{3\sqrt{7}}{7}R.$$

Vậy thể tích khối trụ là

$V = \pi R^2.h = \pi R^2.\dfrac{3\sqrt{7}}{7}R \Rightarrow V = \dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

**------------- HẾT -------------**

**Câu 1.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ và tạo với trục $Oy$ góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng $(P)$?

**A.** $N(-1;-2;-1)$. **B.** $F(1;2;1)$. **C.** $E(-3;0;4)$. **D.** $M(3;0;2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có VTCP của đường thẳng $d$ là $\vec{u}_d=(1;-1;-2)$ và VTCP của trục $Oy$ là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Gọi $\alpha$ là góc giữa $d$ và $Oy$, ta có $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{u}_d.\vec{j}\right|}{\left|\vec{u}_d\right|\left|\vec{j}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\neq 0$ với

Gọi $\beta$ là góc giữa mặt phẳng $(P)$ và $Oy$, do $(P)$ chứa $d$ nên ta có $\beta\le\alpha$. Dấu bằng xảy ra khi mặt phẳng $(P)$ tạo với $Oy$ một góc $\beta$ thỏa mãn $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

$(P)$ chứa $d$ nên $(P)$ có dạng $m(x+y+1)+n(2x+z-2)=0,\ m^2+n^2>0$

$\Leftrightarrow (m+2n)x+my+nz+m-2n=0,\ m^2+n^2>0$

$\sin\beta=\dfrac{|m|}{\sqrt{(m+2n)^2+m^2+n^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\Rightarrow 4m^2+20mn+25n^2=0\Leftrightarrow 2m+5n=0$.

Chọn $m=5,\ n=-2$ suy ra phương trình mặt phẳng $(P):x+5y-2z+9=0$.

Vậy điểm $N(-1;-2;-1)\in(P)$.

**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$, mặt phẳng $(P)$ có phương trình $2x-y-2z+2017=0$. Mặt phẳng $(Q)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ và tạo với mặt phẳng $(P)$ một góc nhỏ nhất. $(Q)$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;a;b)$, khi đó $a+b$ bằng

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $-2$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)$.

Mặt phẳng $(Q)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;a;b)$ nên ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_{(Q)}}=0\Leftrightarrow 2a+b=1\Leftrightarrow b=1-2a$.

Suy ra $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;a;1-2a)$.

Khi đó $\cos((P),(Q))=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|}=\dfrac{\left|2.1+(-1).a-2(1-2a)\right|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{1^2+a^2+(1-2a)^2}}$

$=\dfrac{|a|}{\sqrt{5a^2-4a+2}}=\sqrt{\dfrac{a^2}{5a^2-4a+2}}$.

Xét hàm số $f(a)=\dfrac{a^2}{5a^2-4a+2}$, ta có góc giữa $(P)$ và $(Q)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow\cos((P),(Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow f(a)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(a) = \dfrac{-4a^2 + 4a}{\left(5a^2 - 4a + 2\right)^2}$.

Cho $f'(a) = 0 \Rightarrow -4a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0\ \left(f(0) = 0\right) \\ a = 1\left(f(1) = \dfrac{1}{3}\right) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $a$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(a)$ | $\frac{1}{5}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{3}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{5}$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\cos\left((P),(Q)\right)$ lớn nhất $\Leftrightarrow a = 1$.

Suy ra $b = -1$.

Vậy $a + b = 0$.

**Câu 3.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$, điểm $A(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng $(OAB)$, biết rằng điểm $B$ thuộc mặt cầu $(S)$, có hoành độ dương và tam giác $OAB$ đều.

**A.** $x - y + z = 0$. **B.** $x - y - z = 0$. **C.** $x - y + 2z = 0$. **D.** $x - y - 2z = 0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$(S)$ có tâm $I(1;1;1)$ bán kính $R = \sqrt{3}$.

Dễ thấy hai điểm $O$, $A$ đều thuộc $(S)$, và $OA = 2\sqrt{2}$.

Đặt $B(x;y;z)$, $(x > 0)$.

Từ giả thiết, ta có

$$\begin{cases} B \in (S) \\ OB = 2\sqrt{2} \\ AB = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \text{(do } x > 0\text{)}.$$

Suy ra $B(2;0;2)$.

Mặt phẳng $(OAB)$ qua ba điểm $O$, $A$, $B$ có phương trình $x - y - z = 0$.

Vậy $(OAB): x - y - z = 0$.

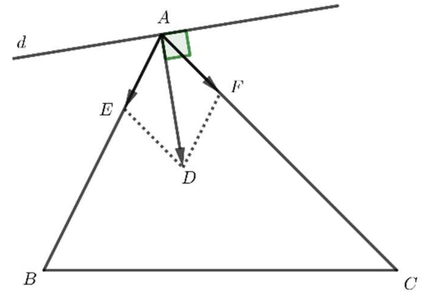
**Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ với $A(1;-2)$, $B(2;-3)$, $C(3;0)$. Phương trình đường phân giác ngoài góc $A$ của tam giác $ABC$ là

**A.** $4x + y - 2 = 0$. **B.** $y = -2$. **C.** $2x + y = 0$. **D.** $x = 1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Bài toán tổng quát:**




Gọi $d$ là phân giác ngoài góc $A$ của tam giác $ABC$.

Đặt $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{AC}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

Khi đó tứ giác $AEDF$ là hình thoi (vì $AE = AF = 1$).
(*Hình bình hành có 2 cạnh kề bằng nhau*).

Suy ra tia $AD$ là tia phân giác trong góc $EAF$.

Do đó: $AD \perp d$. Nên $\overrightarrow{AD}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $d$.

Áp dụng: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;-1), AB = \sqrt{2} \\ \overrightarrow{AC} = (2;2),\ AC = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \left(\sqrt{2};0\right) = \sqrt{2}\left(1;0\right)$.

Xem đáp án chỉ có đáp án A có vectơ pháp tuyến là $(1;0)$.

**Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - my + z + 2m - 1 = 0$ và $(\beta): mx + y - mz + m + 2 = 0$. Gọi $\Delta$ là hình chiếu vuông góc của $d$ lên mặt phẳng $(Oxy)$. Biết rằng với mọi số thực $m$ thay đổi thì đường thẳng $\Delta$ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Tính bán kính $R$ của đường tròn đó.

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Mặt phẳng $(\alpha): x - my + z + 2m - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (1;-m;1)$.

Mặt phẳng $(\beta): mx + y - mz + m + 2 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (m;1;-m)$.

Ta có $M\left(-m - \frac{1}{m};0;-m + \frac{1}{m} + 1\right) \in d = (\alpha) \cap (\beta)$.

Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right] = \left(m^2 - 1;2m;m^2 + 1\right)$.

Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d$ và vuông góc với mặt phẳng $(Oxy)$. Khi đó $(P)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\vec{u};\vec{k}\right] = \left(2m;1 - m^2;0\right)$ (với $\vec{k} = (0;0;1)$).

Phương trình mặt phẳng $(P)$ là $2mx + \left(1 - m^2\right)y + 2m^2 + 2 = 0$.

Trong mặt phẳng $(Oxy)$, gọi $I(a;b;0)$ là tâm đường tròn.

Theo giả thiết $\Delta$ là tiếp tuyến của đường tròn $\Rightarrow d(I;d) = d\left(I;(P)\right) = R$ (cố định)

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2ma + \left(1 - m^2\right)b + 2m^2 + 2\right|}{\sqrt{4m^2 + \left(1 - m^2\right)^2}} = R > 0 \Leftrightarrow \frac{\left|2am + (2 - b)m^2 + b + 2\right|}{m^2 + 1} = R > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2am + (2 - b)m^2 + b + 2 = R\left(m^2 + 1\right) \\ 2am + (2 - b)m^2 + b + 2 = -R\left(m^2 + 1\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a = 0 \\ 2 - b = R \\ b + 2 = R \end{cases} \\ \begin{cases} 2a = 0 \\ 2 - b = -R \\ b + 2 = -R \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ R = 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ R = -2 < 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy $R = 2$.

**Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 + (m + 2)x + 2my - 2mz - m - 3 = 0.$$

Biết rằng với mọi số thực $m$ thì $(S_m)$ luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó.

**A.** $r=\sqrt{3}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Mặt cầu $(S_m)$ có tâm $I\left(-\dfrac{m+2}{2};-m;m\right)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{9m^2+8m+16}}{2}$.

Với $m_1$, $m_2$ tùy ý và khác nhau, ta được hai phương trình mặt cầu tương ứng:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+(m_1+2)x+2m_1y-2m_1z-m_1-3=0 \quad (1) \\ x^2+y^2+z^2+(m_2+2)x+2m_2y-2m_2z-m_2-3=0 \quad (2) \end{cases}.$$

Lấy $(1)$ trừ $(2)$ theo vế, ta được:

$(m_1-m_2)x+2(m_1-m_2)y-2(m_1-m_2)z-(m_1-m_2)=0$

$\Leftrightarrow (m_1-m_2).(x+2y-2z-1)=0$

$\Leftrightarrow x+2y-2z-1=0 \quad (3)$. (vì $m_1\neq m_2$)

Dễ thấy $(3)$ là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

$\Rightarrow$ Họ mặt cầu $(S_m)$ có giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng $(P)$ cố định có phương trình: $x+2y-2z-1=0$.

Mặt khác, đặt $d=d\left[I,(P)\right]=\dfrac{\left|-\dfrac{m+2}{2}-2m-2m-1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-9m-4|}{6}$.

$\Rightarrow r^2=R^2-d^2=\dfrac{9m^2+8m+16}{4}-\dfrac{(-9m-4)^2}{36}=\dfrac{32}{9}\ \ \forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

**Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4),B(2;0;0)$ và cắt $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn $(C)$ sao cho khối nón có đỉnh là tâm của $(S)$, là hình tròn $(C)$ có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng:

**A.** 2. **B.** -4. **C.** 8. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Vì $(\alpha)$ qua $A$ ta có: $-(-4)+c=0\Rightarrow c=-4$.

+ Vì $(\alpha)$ qua $B$ ta có: $2a+c=0\Rightarrow a=2$.

$\Rightarrow(\alpha)$: $2x+by-z-4=0$.

+ Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-2;3),R=3\sqrt{3}$.

+ Chiều cao khối nón: $h=d_{(I,\alpha)}=\dfrac{|2-2b-3-4|}{\sqrt{4+b^2+1}}=\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$.

+Bán kính đường tròn (C): $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{27-\left(\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}\right)^2}=\sqrt{27-\dfrac{(2b+5)^2}{b^2+5}}$.

+ Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(27-\frac{(2b+5)^2}{b^2+5}\right)\frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$

+ Tới đây ta có thể thử các trường hợp đáp án.

Hoặc ta làm tự luận như sau:

Đặt $t=\frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$ và xét hàm số $f(t)=(27-t^2)t$ trên đoạn $\left[0;3\sqrt{3}\right]$.

Ta có: $f'(t)=27-3t^2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-3\,(l)\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $3$ | | $3\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $54$ | $\searrow$ | $0$ |

Do đó thể tích khối nón lớn nhất khi và chỉ khi

$t=3\Leftrightarrow\left(\frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}\right)^2=3^2\Leftrightarrow 4b^2+20b+25=9b^2+45$

$\Leftrightarrow 5b^2-20b+20=0\Leftrightarrow b=2$.

Vì vậy $a-b+c=-4$.

Hoặc Ta gọi chiều cao khối nón là $h$ , từ phương trình tính thể tích ta suy ra $h=3$ , tìm $b$ từ phương trình: $\frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}=3$.

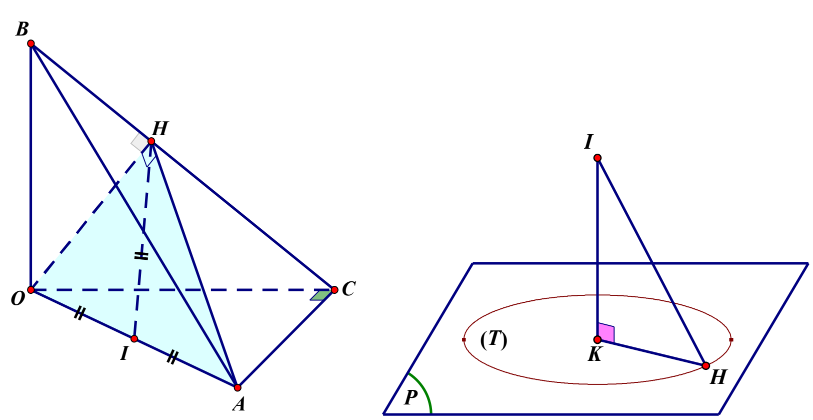
------------------------------- Hết -------------------------------

**Câu 8.** **(Chuyên Nguyễn Trãi-Hải Dương 18-19)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A\left(0;4\sqrt{2};0\right)$, $B\left(0;0;4\sqrt{2}\right)$, điểm $C\in(Oxy)$ và tam giác $OAC$ vuông tại $C$, hình chiếu vuông góc của $O$ trên $BC$ là điểm $H$. Khi đó điểm $H$ luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng

**A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $4$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**




+) Dễ thấy $B\in Oz$. Ta có $A\in(Oxy)$ và $C\in(Oxy)$, suy ra $OB\perp(OAC)$.

+) Ta có $\begin{cases} AC \perp OC \\ AC \perp OB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBC)$, mà $OH \subset (OBC)$. Suy ra $AC \perp OH$ $(1)$.

Mặt khác ta có $OH \perp BC$ $(2)$, (theo giả thiết).

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AB$ và $OH \perp HA$.

+) Với $OH \perp AB$ suy ra $H$ thuộc mặt phẳng $(P)$ với $(P)$ là mặt phẳng đi qua $O$ và vuông góc với đường thẳng $AB$. Phương trình của $(P)$ là: $y - z = 0$.

+) Với $OH \perp HA \Rightarrow \Delta OHA$ vuông tại $H$. Do đó $H$ thuộc mặt cầu $(S)$ có tâm $I\left(0;2\sqrt{2};0\right)$ là trung điểm của $OA$ và bán kính $R = \dfrac{OA}{2} = 2\sqrt{2}$.

+) Do đó điểm $H$ luôn thuộc đường tròn $(T)$ cố định là giao tuyến của mặt phẳng $(P)$ với mặt cầu $(S)$.

+) Giả sử $(T)$ có tâm $K$ và bán kính $r$ thì $IK = d\left(I,(P)\right) = 2$ và $r = \sqrt{R^2 - IK^2} = 2$.

Vậy điểm $H$ luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng $2$.

**Câu 9.** **(SỞ GD THANH HÓA_14-04-2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y - 1 = 0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\dfrac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm $M$, $N$ thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $d(M,d) = 2$ và $NA = 2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn $MN$.

**A.** $MN_{\min} = \dfrac{2}{3}$. **B.** $MN_{\min} = \sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min} = 1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1;2-t;1)$

$I \in (P) \Rightarrow 2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I(1;1;1)$

Ta có $d \perp (P) \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(1;1;1), R_1 = 2$.

$N(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{NA}(-1-x;-3-y;11-z); \overrightarrow{NB}\left(\dfrac{1}{2} - x; -y; 8 - z\right)$

$NA = 2NB \Leftrightarrow (1+x)^2 + (3+y)^2 + (11-z)^2 = 4\left[\left(\dfrac{1}{2} - x\right)^2 + y^2 + (8-z)^2\right]$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6y - 42z + 126 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14z + 42 = 0$

Vậy $N \in S\left(J(1;1;7); R_2 = 3\right)$ và $J \in (P): y = 1$

Nên $N$ thuộc đường tròn tâm $J(1;1;7); R_2 = 3$

Ta có $IJ = 6 > R_1 + R_2 \Rightarrow MN_{\min} = IJ - R_1 - R_2 = 1$

**Câu 10.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;\ 0;\ 0)$, $M(1;\ 1;\ 1)$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm $A$ và $M$, cắt các trục $Oy$, $Oz$ lần lượt tại các điểm $B$ và $C$. Giả sử $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$, $b>0$, $c>0$. Diện tích tam giác $ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** $2\sqrt{6}$. **B.** $4\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo giả thiết $(P)$ có dạng $\frac{x}{2}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do $M\in(P)\Rightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2(b+c)=bc$ (1).

$\overrightarrow{AB}=(-2;\ b;\ 0)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;\ 0;\ c)$ nên diện tích tam giác $ABC$ là

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2b+2c)^2-8bc+(bc)^2}\overset{(1)}{=}\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{(bc)^2-4(bc)}.$$

Từ giả thiết ta có $bc>0$ và theo bất đẳng thức Cô – si:

$bc=2(b+c)\ge 2.2\sqrt{bc}\Rightarrow\sqrt{bc}\ge 4\Rightarrow bc\ge 16$.

Khi đó $S_{ABC}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{(bc)^2-4bc}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{(bc-2)^2-4}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{14^2-4}=4\sqrt{6}$.

Do đó $\min S_{ABC}=4\sqrt{6}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}b=c>0\\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow b=c=4$.

**Câu 11.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;9)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=25$. Gọi $(C)$ là giao tuyến của $(S)$ với mặt phẳng $(Oxy)$. Lấy hai điểm $M,N$ trên $(C)$ sao cho $MN=2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng $MN$ đi qua điểm nào trong số các điểm dưới đây?

**A.** $(5;5;0)$. **B.** $\left(-\frac{1}{5};4;0\right)$. **C.** $(4;6;0)$. **D.** $\left(\frac{12}{5};-3;0\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

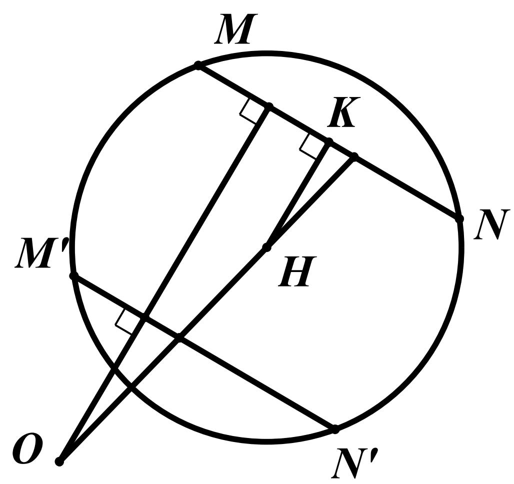
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(3;4;4)$, bán kính $R=5$. Gọi $r_C$ là bán kính đường tròn $(C)$.

Gọi $H$ là tâm đường tròn $(C)\Rightarrow H(3;4;0), IH\perp(Oxy)$, $d(I,(Oxy))=4$.

$r_C=\sqrt{5^2-4^2}=3$, $OH=5\Rightarrow O$ nằm ngoài đường tròn $(C)$, $d(A,(Oxy))=9$

$V_{OAMN}=\frac{1}{3}d(A,(Oxy)).S_{OMN}=3S_{OMN}=3.\frac{1}{2}d(O,MN).MN=3\sqrt{5}.d(O,MN)$

Suy ra $V_{max}\Leftrightarrow d(O,MN)_{max}$




Mà $d\left(O,MN\right)\le OH+HK=5+\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=7$ . (Với $K$ là trung điểm $MN$ )

Dấu bằng xảy ra khi $OH\perp MN$ . Khi đó $MN$ có 1 véc tơ chỉ phương là $\left[\overrightarrow{OH};\vec{k}\right]=\left(4;-3;0\right),\left(\overrightarrow{OH}=\left(3;4;0\right),\vec{k}=\left(0;0;1\right)\right)$ và đi qua trung điểm $K$ của $MN$ .

$\overrightarrow{OK}=\frac{7}{5}\overrightarrow{OH}\Rightarrow K\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5};0\right)$

Phương trình đường thẳng $MN:\begin{cases}x=\frac{21}{5}+4t\\ y=\frac{28}{5}-3t\\ z=0\end{cases}\xrightarrow{t=\frac{1}{5}}\left(5;5;0\right)$

**Câu 12.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ , cho ba điểm $A\left(a;0;0\right)$, $B\left(0,b,0\right)$, $C\left(0,0,c\right)$ với $a$, $b$ ,$c$ là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$ khi khoảng cách từ $O$ đến mặt phẳng $\left(ABC\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

**A.** $S=\frac{51}{4}$. **B.** $S=\frac{51}{5}$. **C.** $S=\frac{49}{4}$. **D.** $S=\frac{49}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình mặt phẳng $\left(ABC\right)$: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\Leftrightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$.

$$d\left(O;\left(ABC\right)\right)=\frac{\left|\frac{0}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=P.$$

$P_{\max}\Leftrightarrow T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ min$.

$$T=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{4b^2}+\frac{16}{16c^2}\ge\frac{\left(1+2+4\right)^2}{a^2+4b^2+16c^2}=\frac{7^2}{49}=1.$$

$S_{\min}=1$. Dấu bằng xảy ra $\frac{1}{a^2}=\frac{2}{4b^2}=\frac{4}{16c^2}\Rightarrow 2b^2=a^2$; $4c^2=a^2$.

$a^2+4b^2+16c^2=49 \Leftrightarrow a^2+4\frac{a^2}{2}+16\frac{a^2}{4}=49 \Leftrightarrow a^2=7$, $b^2=\frac{7}{2}$, $c^2=\frac{7}{4}$.

Vậy $S=a^2+b^2+c^2=\frac{49}{4}$.

**Câu 13.** **(Nguyễn Khuyến 18-19)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa $(d_1)$ sao cho góc giữa $(P)$ và đường thẳng $(d_2)$ là lớn nhất là: $ax-y+cz+d=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ bằng

**A.** $T=-6$. **B.** $T=0$. **C.** $T=3$. **D.** $T=-\frac{13}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

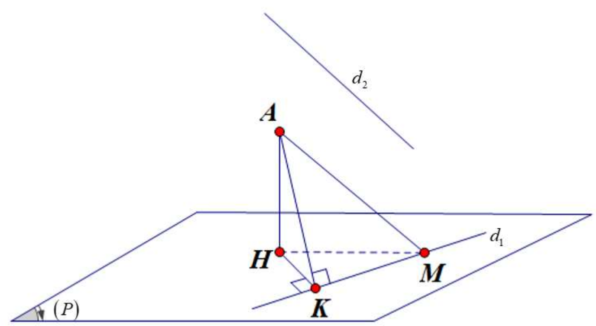
Ta xét bài toán tổng quát như sau:

**Bài toán:** Cho hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ không song song. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa $d_1$ và tạo với đường thẳng $d_2$ một góc lớn nhất.

**Phương pháp giải**

Giả sử $d_1$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$, $d_2$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}$.

Trước hết ta xét trường hợp $d_1$ và $d_2$ chéo nhau.




Gọi $M$ là một điểm nào đó thuộc $d_1$, dựng đường thẳng qua $M$ và song song với $d_2$. Lấy điểm $A$ cố định trên đường thẳng đó. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên mặt phẳng $P$, $K$ là hình chiếu của $A$ lên đường thẳng $d_1$.

Góc giữa mặt phẳng $(P)$ và đường thẳng $d_2$ là $\widehat{AMH}$.

Ta có $\sin\left(\widehat{d_2,P}\right)=\sin\left(\widehat{HMA}\right)=\frac{AH}{AM}\le\frac{AK}{AM}$ (do $AH\le AK$). Góc $\left(\widehat{d_2,P}\right)$ lớn nhất khi $\sin\left(\widehat{d_2,P}\right)$ lớn nhất. Do $\frac{AK}{AM}$ không đổi suy ra $\sin\left(\widehat{d_2,P}\right)$ lớn nhất $H\equiv K$.

Mặt phẳng $(P)$ cần tìm là mặt phẳng chứa $d_1$ và vuông góc với mặt phẳng $(AKM)$, hay vectơ pháp tuyến của $(P)$ vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{u_1}$ và $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$.

Nên ta chọn vectơ pháp tuyến của $(P)$ là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1},\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right]$.

Trường hợp $d_1$ và $d_2$ cắt nhau tại $M$, bài toán giải tương tự như trên. Kết luận không thay đổi: vectơ pháp tuyến của $(P)$ là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1},\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right]$.

Áp dụng vào bài 45 ta có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$; $\overrightarrow{u_2}=(2;-1;2)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(3;-4;-5) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_1};\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]\right]=(-14;2;-10)=-2(7;-1;5)$.

Mặt phẳng $(P)$ chứa $d_1$ nên mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm $A(1;-2;0)$ .

Phương trình mặt phẳng $(P):7x-y+5z-9=0$. Suy ra $a+c+d=7+5-9=3$.

**Câu 14.** **(SỞ GD THANH HÓA_14-04-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa $d$ sao cho khoảng cách từ $A$ đến $(P)$ là lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến $(P)$ bằng

**A.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là một vectơ pháp tuyến của $(P)$, với $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Điểm $M(1;0;2)\in d\Rightarrow M\in(P)$.

Phương trình của $(P):ax+by+cz-(a+2c)=0$.

Một vectơ chỉ phương của $d$ là $\vec{u}=(2;1;2)\Rightarrow \vec{n}\perp\vec{u}\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2a+b+2c=0$.

$\Rightarrow b=-(2a+2c)\Rightarrow d(A,(P))=\frac{|a+5b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{9|a+c|}{\sqrt{a^2+c^2+4(a+c)^2}}$.

Ta có $(a+c)^2\leq 2(a^2+c^2)\Leftrightarrow \frac{(a+c)^2}{2}\leq a^2+c^2$ với $\forall a,c\in\mathbb{R}$.

Suy ra: $a^2+c^2+4(a+c)^2\geq\frac{(a+c)^2}{2}+4(a+c)^2=\frac{9}{2}(a+c)^2$.

Do đó $d(A,(P))=\frac{9|a+c|}{\sqrt{a^2+c^2+4(a+c)^2}}\leq\frac{9|a+c|}{\sqrt{\frac{9}{2}(a+c)^2}}=\frac{9|a+c|\sqrt{2}}{3|a+c|}=3\sqrt{2}.$

$\Rightarrow Max\,d(A,(P))=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=-4a\end{cases}$. Chọn $a=c=1\Rightarrow b=-4.$

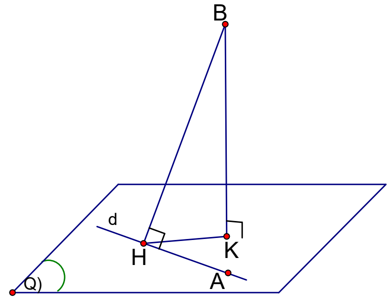
Phương trình $(P):x-4y+z-3=0\Rightarrow d(O,(P))=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z-5=0$. Đường thẳng $(d)$ đi qua $A$, song song với mặt phẳng $(P)$ sao cho khoảng cách từ $B$ đến đường thẳng $d$ nhỏ nhất. Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;b;c)$. Khi đó $\frac{b}{c}$ bằng

**A.** $\frac{b}{c}=11$. **B.** $\frac{b}{c}=-\frac{11}{2}$. **C.** $\frac{b}{c}=-\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $(Q)$ là mặt phẳng đi qua $A(-3;0;1)$ và song song với $(P)$ $\Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{n_P} = (1;-2;2)$

Phương trình mặt phẳng $(Q): x-2y+2z+1=0$.

Vì đường thẳng $d$ đi qua $A$, song song với mặt phẳng $(P)$ nên $d \subset (Q)$.

Gọi $H, K$ lần lượt là hình chiếu của $B$ lên đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(Q)$.

Khi đó $d(B,(d)) = BH \ge BK$. Suy ra $d(B,d)_{\min} = BK \Leftrightarrow H \equiv K$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $B$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{n_P} = (1;-2;2)$

Phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+2t \end{cases}$. Lấy $H(1+t;-1-2t;3+2t) \in \Delta$.

Vì $H \in (Q)$ nên $(1+t) - 2(-1-2t) + 2(3+2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{10}{9}$.

Suy ra $H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{26}{9}\left(1;\dfrac{11}{26};-\dfrac{2}{26}\right)$.

Suy ra một vec tơ chỉ phương của $d$ là $\overrightarrow{u_d} = \left(1;\dfrac{11}{26};-\dfrac{2}{26}\right) \Rightarrow b = \dfrac{11}{26}, c = -\dfrac{2}{26}$.

Vậy $\dfrac{b}{c} = -\dfrac{11}{2}$.

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=12$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng song song với $(P)$ và cắt $(S)$ theo thiết diện là đường tròn $(C)$ sao cho khối nón có đỉnh là tâm mặt cầu và đáy là hình tròn $(C)$ có thể tích lớn nhất.

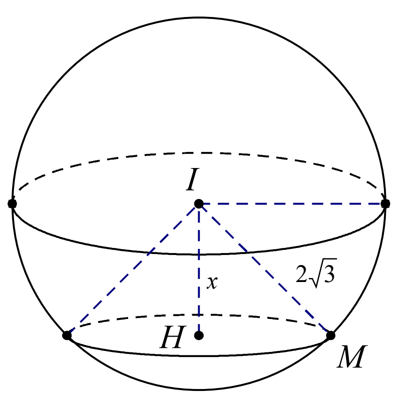
**A.** $(Q): 2x+2y-z+2=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z+8=0$.

**B.** $(Q): 2x+2y-z-1=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z+11=0$.

**C.** $(Q): 2x+2y-z-6=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z+3=0$.

**D.** $(Q): 2x+2y-z+2=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z+2=0$.

**Lời giải**




**Chọn B**

$(\alpha)//(P) \Rightarrow (\alpha): 2x+2y-z+d=0 (d \neq -3)$.

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Gọi $(H)$ là khối nón thỏa đề bài với đường sinh $l=R=2\sqrt{3}$.

Đặt $x=h=d(I,(\alpha))$. Khi đó bán kính đường tròn đáy hình nón : $r=\sqrt{12-x^2}$.

Thể tích khối nón: $V_{(H)}=\dfrac{1}{3}\pi(12-x^2)x$, với $0<x<2\sqrt{3}$.

Xét sự biến thiên của hàm số : $f(x)=\dfrac{1}{3}\pi(12-x^2)x$ trên $0<x<2\sqrt{3}$.

| x | 0 | | 2 | | $2\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Khi đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=2$, hay $d(I,(\alpha))=2$

Vậy : $d(I,(\alpha))=2 \Leftrightarrow \dfrac{|2.1+2.(-2)-3+d|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d-5=6 \\ d-5=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=11 \\ d=-1 \end{array}\right.$.

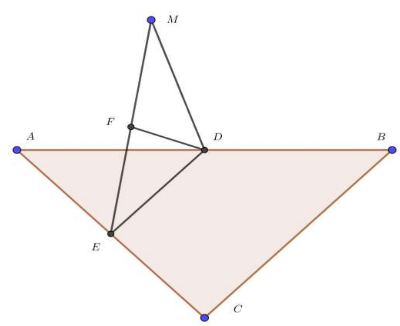
**Câu 17.** **(TRƯỜNG THPT KINH MÔN)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc $(Oxy)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

**A.** $M(2;3;1)$. **B.** $M(1;3;0)$. **C.** $M(2;-3;0)$. **D.** $M(2;3;0)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

***Cách 1***




Gọi $D;E;F$ lần lượt là trung điểm của $AB;AC;ME$. Ta có:

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|2.\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CB}\right|=\left|2.\overrightarrow{MD}+2.\overrightarrow{ED}\right|=2\left|2.\overrightarrow{FD}\right|=4.FD$

Ta lại có: $M(x;y;0)$; $D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; $E(3;0;0)$; $F\left(\dfrac{x+3}{2};\dfrac{y}{2};0\right)$

$FD_{\min} \Leftrightarrow F$ là hình chiếu của $D$ trên $mp(Oxy) \Leftrightarrow x=2; y=3 \Leftrightarrow M(2;3;0)$

***Cách 2***

Gọi $I$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{0C}\right) \Rightarrow I(2;3;1)$

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right|=2.MI$

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $M$ là hình chiếu của $I$ trên $mp(Oxy)$.

Vì $I(2;3;1) \Rightarrow M(2;3;0)$

***Cách 3***

Gọi $M(x;y;0)$. Ta có:

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(4-2x;6-2y;-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{4x^2+4y^2-16x-24y+53}$

Thế tọa độ điểm $M$ ở đáp án **A** vào ta được $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=1$

Thế tọa độ điểm $M$ ở đáp án **B** vào ta được $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{17}$

Thế tọa độ điểm $M$ ở đáp án **C** vào ta được $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{145}$

Điểm $M$ ở đáp án **D** không thuộc $(Oxy)$ nên bị loại.

***Cách 4***

Gọi $M(x;y;0)$. Ta có:

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(4-2x;6-2y;-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{4x^2+4y^2-16x-24y+53}$

Ta có: $\sqrt{4x^2+4y^2-16x-24y+53}=\sqrt{(2x-4)^2+(2y-6)^2+1} \geq 1$

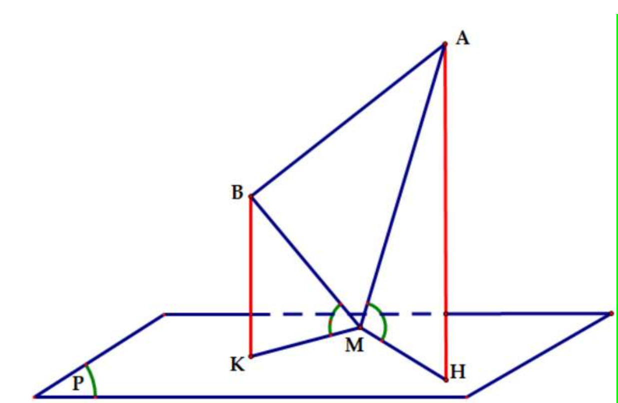
Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=2; y=3$. Khi đó $M(2;3;0)$.

**Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+4=0$ và các điểm $A(2;1;2)$, $B(3;-2;2)$. Điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho các đường thẳng $MA, MB$ luôn tạo với mặt phẳng $(P)$ các góc bằng nhau. Biết rằng điểm $M$ luôn thuộc đường tròn $(C)$ cố định. Tìm tọa độ tâm của đường tròn $(C)$.

**A.** $\left(\frac{74}{27};-\frac{97}{27};\frac{62}{27}\right)$. **B.** $\left(\frac{10}{3};-3;\frac{14}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{17}{21};-\frac{17}{21};\frac{17}{21}\right)$. **D.** $\left(\frac{32}{9};-\frac{49}{9};\frac{2}{9}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $H, K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A, B$ lên $(P)$.

Ta có tọa độ $H$ thỏa $\begin{cases} AH: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1} \\ (P): 2x+2y-z+4=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{9};-\frac{7}{9};\frac{26}{9}\right)$

Tương tự tọa độ $K$ thỏa $\begin{cases} BK: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-2}{-1} \\ (P): 2x+2y-z+4=0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\dfrac{19}{9};-\dfrac{26}{9};\dfrac{22}{9}\right)$

Theo giả thiết ta có

$\measuredangle BMK = \measuredangle AMH \Rightarrow \tan\measuredangle BMK = \tan\measuredangle AMH \Rightarrow \dfrac{BK}{MK}=\dfrac{AH}{MH} \Rightarrow \dfrac{MK}{MH}=\dfrac{d\left(B;(P)\right)}{d\left(A;(P)\right)}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow MH = 2MK \Rightarrow MH^2 = 4MK^2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IH}\right)^2 = 4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)^2$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IH}+IH^2 = 3MI^2+8\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}+4IK^2$

$\Rightarrow 3MI^2 = 4IK^2 - IH^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(4\overrightarrow{IK}-\overrightarrow{IH}\right)$

Gọi $I$ là điểm sao cho $\overrightarrow{IH}=4\overrightarrow{IK}$. Khi đó $MI^2 = \dfrac{4IK^2-IH^2}{3}$ hay $M$ thuộc vào mặt cầu tâm $I$ có bán kính $\sqrt{\dfrac{4IK^2-IH^2}{3}}$ với $I\left(\dfrac{74}{27};-\dfrac{97}{27};\dfrac{62}{27}\right)$

Khi đó $M\in(C)=(S)\cap(P)$. Do đó, tâm đường tròn cần tìm là hình chiếu của $I$ lên $(P)$.

Nhận xét $I\in(P)$, do đó tâm đường tròn cũng chính là tâm mặt cầu.

**Câu 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ $B$ là $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong góc $C$ là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

**A.** $\vec{u}=(2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;2;1)$. **C.** $\vec{u}=(0;1;-1)$. **D.** $\vec{u}=(1;-1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $d_1$ và $d_2$ lần lượt là phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh $B$ và đường phân giác trong góc $C$.

$\Rightarrow d_1: \begin{cases} x=3-t \\ y=3+2t \\ z=2-t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+2t' \\ y=4-t' \\ z=2-t' \end{cases}$

Gọi $M$ là trung điểm $AC \Rightarrow M\in d_1 \Rightarrow M(3-t;3+2t;2-t)$.

Vì $C\in d_2 \Rightarrow C(2+2t';4-t';2-t')$. Mà vì $M$ là trung điểm $AC$

$\Rightarrow \begin{cases} 2+2t'=2(3-t)-2 \\ 4-t'=2(3+2t)-3 \\ 2-t'=2(2-t)-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2t'=4-2t \\ 4-t'=3+4t \\ 2-t'=1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t'=1 \end{cases}.$

$\Rightarrow M(3;3;2)$ và $C(4;3;1)$.

Gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua $A$ và vuông góc với $d_2$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_{d_2}}=(2;-1;-1) \Rightarrow (P): 2.(x-2)-(y-3)-(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-z+2=0$.

Gọi N là điểm đối xứng với A qua $d_2$ $\Rightarrow N\in(BC)$ và $N\in(P)$.

Gọi I là trung điểm của AN$\Rightarrow I=d_2\cap(P)\Rightarrow I=(2;4;2)\Rightarrow N(2;5;1)$.

Dễ thấy $N\in d_2$ khi $t=1$. $\Rightarrow N\equiv B$. Vậy $\begin{cases} A(2;3;3) \\ B(2;5;1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(0;1;-1)$.

**Câu 20.** **(HK2-L12-Chuyên-Lê-Hồng-Phong-TPHCM-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+5=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+7=0$. Mặt phẳng $(\alpha)$ thay đổi tiếp xúc với 2 mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$ tại 2 điểm phân biệt $M$, $N$ với $M\in(S_1)$, $N\in(S_2)$. Tập hợp điểm $M$ là đường tròn tâm $K(a;b;c)$. Tính $T=a+b+c$.

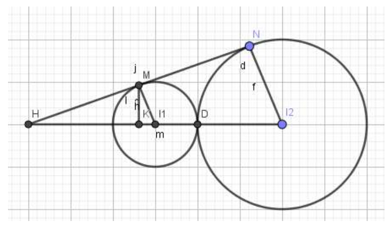
**A.** $T=\dfrac{7}{3}$. **B.** $T=1$. **C.** $T=5$. **D.** $T=\dfrac{37}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $(S_1)$ có tâm $I_1(1;1;2)$ và bán kính $R_1=1$; $(S_2)$ có tâm $I_2(3;-1;1)$ và bán kính $R_2=2$. Ta có: $\overrightarrow{I_1I_2}=(2;-2;-1)\Rightarrow I_1I_2=\left|\overrightarrow{I_1I_2}\right|=3\Rightarrow I_1I_2=R_1+R_2$

$\Rightarrow (S_1)$, $(S_2)$ tiếp xúc ngoài nhau.




$\Rightarrow K$ là hình chiếu vuông góc của $M$ lên $HI_1$.

Do $MI_1\perp MN; NI_2\perp MN\Rightarrow MI_1 \parallel NI_2; \dfrac{MI_1}{NI_2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow HI_1=3$

$\Rightarrow KI_1=\dfrac{1}{3}$ ( Do $\Delta MHI_1$ vuông tại $M$ ). Đường thẳng $I_1I_2$ có phương trình là

$\begin{cases}x=1+2t\\ y=1-2t\\ z=2-t\end{cases}\Rightarrow K(1+2t;1-2t;2-t)\Rightarrow \overrightarrow{I_1K}=(2t;-2t;-t)\Rightarrow I_1K=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 9t^2=\dfrac{1}{9}\Rightarrow t=\pm\dfrac{1}{9}\Rightarrow K\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{19}{9}\right)$ (do $\overrightarrow{KI_1}=\dfrac{1}{10}\overrightarrow{KI_2}$).

Kết luận: $T=\dfrac{37}{9}$.

**Câu 21.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ ( với $a$, $b$, $c$ tối giản) thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

**A.** $6$. **B.** $\dfrac{51}{7}$. **C.** $\dfrac{12}{7}$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$.

$M(a;b;c)\in(S)\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=16$.

Ta có: $\left|2(a-1)+3(b-2)+6(c-2)\right|\le\sqrt{(2^2+3^2+6^2).\left[(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\right]}$.

$\Leftrightarrow \left|2a+3b+6c-20\right|\le 28$.

$\Rightarrow 2a+3b+6c-20\le 28$.

$\Rightarrow 2a+3b+6c \le 48$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b-2}{3} \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{c-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ 3a-2b=-1 \\ 3a-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{15}{7} \\ b=\dfrac{26}{7} \\ c=\dfrac{38}{7} \end{cases}$

Vậy $P=2a-b+c=2.\dfrac{15}{7}-\dfrac{26}{7}+\dfrac{38}{7}=6$.

**Câu 22.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;1;1)$, $N(4;3;4)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-9}{1}$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thuộc đường thẳng $\Delta$ sao cho chu vi tam giác $IMN$ nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

**A.** $T=\dfrac{40}{3}$. **B.** $T=\dfrac{23}{3}$. **C.** $T=29$. **D.** $T=19$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1.**

Ta có $I \in \Delta$; $I(7+t;3-2t;9+t)$.

Ta tính: $MI=\sqrt{6t^2+16t+84}$; $NI=\sqrt{6t^2+16t+34}$; $MN=\sqrt{14}$.

Gọi $C$ là chu vi tam giác $IMN$; $C=\sqrt{6\left(t+\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{220}{3}}+\sqrt{6\left(t+\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{70}{3}}+\sqrt{14}$.

Hay $C \ge \sqrt{\dfrac{220}{3}}+\sqrt{\dfrac{70}{3}}+\sqrt{14}$.

Chu vi tam giác $IMN$ nhỏ nhất khi $t=-\dfrac{4}{3}$; khi đó $I\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{17}{3};\dfrac{23}{3}\right)$ hay $T=19$.

**Cách 2.**

Gọi véc tơ $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của $\Delta$ ta có $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN}=0$.

Đường thẳng $MN$ vuông góc với $\Delta$.

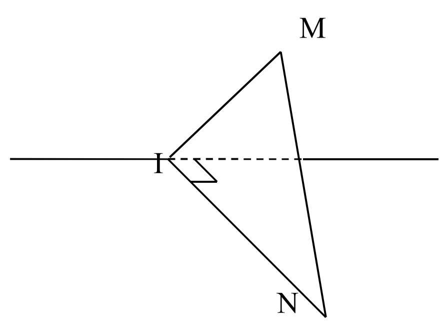
Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng chứa $MN$ và vuông góc với $\Delta$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ chứa $MN$ vuông góc với $\Delta$ là: $x-2y+z-2=0$.

Mặt phẳng $(\alpha)$ cắt $\Delta$ tại $H\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{17}{3};\dfrac{23}{3}\right)$.

Gọi điểm $I \in \Delta$; Gọi $C$ là chu vi tam giác $IMN$. Ta có:

$C=MI+NI+MN \ge MH+NH+\sqrt{14}=\sqrt{\dfrac{220}{3}}+\sqrt{\dfrac{70}{3}}+\sqrt{14}$.



Vậy chu vi tam giác $IMN$ nhỏ nhất khi $I \equiv H$. Hay $I\left(\frac{17}{3};\frac{17}{3};\frac{23}{3}\right)$. Vậy $T = 19$.

**Câu 23.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P): 2y - z = 0$. Biết điểm $B$ thuộc $(P)$, điểm $C$ thuộc $(Oxy)$ sao cho chu vi tam giác $ABC$ nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

**A.** $2\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $6\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $A(1;4;3)$ lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow H(1;4;0)$

Gọi $A_1$ là điểm đôi xứng của $A$ qua mặt phẳng $(Oxy)$, ta tìm được $A_1(1;4;-3)$

Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $A(1;4;3)$ lên mặt phẳng $(P)$

Ta có phương trình đường thẳng $AK: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$, Gọi $K(1;4+2t;3-t) \in AK$

Mặt khác, $K \in (P) \Rightarrow 5t + 5 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow K(1;2;4)$

Gọi $A_2$ là điểm đôi xứng của $A$ qua mặt phẳng $(P)$ thì $K$ là trung điểm của $AA_2$.

Ta có $\begin{cases} x_{A_2} = 2x_K - x_A = 1 \\ y_{A_2} = 2y_K - y_A = 0 \\ z_{A_2} = zx_K - z_A = 5 \end{cases} \Rightarrow A_2(1;0;5)$

Ta có chu vi tam giác $ABC$ là $P_{\Delta ABC} = AC + AB + BC = A_1C + A_2B + BC \geq A_1A_2$.

Dấu bằng xảy ra khi $A_1, A_2, B, C$ thẳng hàng

Suy ra $\left(P_{\Delta ABC}\right)_{\min} = A_1A_2 = 4\sqrt{5}$.

**Câu 24.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;\ 0;\ 0)$, $M(1;\ 1;\ 1)$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm $A$ và $M$, cắt các trục $Oy$, $Oz$ lần lượt tại các điểm $B$ và $C$. Giả sử $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$, $b > 0$, $c > 0$. Diện tích tam giác $ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** $2\sqrt{6}$. **B.** $4\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo giả thiết $(P)$ có dạng $\frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Do $M \in (P) \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(b+c) = bc$ (1).

$\overrightarrow{AB} = (-2;\ b;\ 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-2;\ 0;\ c)$ nên diện tích tam giác $ABC$ là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(b^2 + c^2\right) + b^2c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2b+2c)^2 - 8bc + (bc)^2} \overset{(1)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{(bc)^2 - 4(bc)}.$$

Từ giả thiết ta có $bc > 0$ và theo bất đẳng thức Cô – si:

$bc = 2(b+c) \geq 2.2\sqrt{bc} \Rightarrow \sqrt{bc} \geq 4 \Rightarrow bc \geq 16$.

Khi đó $S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{(bc)^2 - 4bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{(bc-2)^2 - 4} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{14^2 - 4} = 4\sqrt{6}$.

Do đó $\min S_{ABC} = 4\sqrt{6}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} b = c > 0 \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 4$.

**Câu 25.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $D$ sao cho ba điểm $A$, $B$, $C$ nằm cùng phía đối với $(\alpha)$ và tổng khoảng cách từ các điểm $A$, $B$, $C$ đến mặt phẳng $(\alpha)$ là lớn nhất. Giả sử phương trình $(\alpha)$ có dạng: $2x+my+nz-p=0$. Khi đó, $T=m+n+p$ bằng:

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $D(4;2;1)$ nên phương trình $(\alpha)$ có dạng:

$a.(x-4)+b.(y-2)+c.(z-1)=0$ (với $a^2+b^2+c^2>0$)

Đặt $S=d\left[A,(\alpha)\right]+d\left[B,(\alpha)\right]+d\left[C,(\alpha)\right]=\dfrac{|-2a-2b|+|-a-b+4c|+|-3a-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Theo giả thiết, $A$, $B$, $C$ nằm cùng phía đối với $(\alpha)$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử:

$$\begin{cases}-2a-2b>0\\-a-b+4c>0\\-3a-c>0\end{cases}.$$

Khi đó, $S=\dfrac{-2a-2b-a-b+4c-3a-c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{-6a-3b+3c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức $B.C.S$ cho hai bộ số $(-6;-3;3)$ và $(a;b;c)$, ta được:

$-6a-3b+3c\le|-6a-3b+3c|\le\sqrt{\left(6^2+3^2+3^2\right).\left(a^2+b^2+c^2\right)}$.

$\Rightarrow S\le 3\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}-6a-3b+3c\ge 0\\ \dfrac{a}{-6}=\dfrac{b}{-3}=\dfrac{c}{3}\end{cases}$. Ta chọn $\begin{cases}a=-2\\b=-1\\c=1\end{cases}$.

$\Rightarrow(\alpha):-2x-y+z+9=0$ hay $(\alpha):2x+y-z-9=0$.

$\Rightarrow m=1$, $n=-1$, $p=9$.

Vậy $T=m+n+p=9$.

**Câu 26.** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;0), B(1;-1;3), C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z-15=0$. Xét $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $3$. **B.** $7$. **C.** $2$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $I$ là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI})-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI})=\vec{0}$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}{2}\Rightarrow I(1;2;-2)$.

Ta có $2MA^2=2\overrightarrow{MA}^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$.

$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$.

$MC^2=\overrightarrow{MC}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IC}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}$.

Suy ra $2MA^2-MB^2+MC^2=2MI^2+2IA^2+IC^2-IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}\right)$.

Suy ra $2MA^2-MB^2+MC^2=2MI^2+2IA^2+IC^2-IB^2$. Do $I$ cố định nên $2IA^2+IC^2-IB^2$ không đổi. Vậy $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của $I$ trên (P).

• Đường thẳng $\Delta$ qua $I(1;2;-2)$ và vuông góc với $(P)$ là: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-3t \\ z=-2+2t \end{cases}$.

Suy ra tọa độ điểm $M$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-3t \\ z=-2+2t \\ 3x-3y+2z-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \\ z=0 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow M(4;-1;0)$.

Suy ra $a+b+c=3$.

**Câu 27.** **(Thi Thử Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1. 2018-2019)** Cho các số thực $a,b,c$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2a-4b=4$. Tính $P=a+2b+3c$ khi biểu thức $|2a+b-2c+7|$ đạt giá trị lớn nhất.

**A.** $-3$. **B.** $-7$. **C.** 7. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập hợp $M(a;b;c)$ thỏa $a^2+b^2+c^2-2a-4b=4$ là mặt cầu $(S):(a-1)^2+(b-2)^2+c^2=9$ có tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R=3$.

$|2a+b-2c+7|=\dfrac{3|2a+b-2c+7|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=3d(M,(Q))$, $(Q):2x+y-2z+7=0$

$|2a+b-2c+7|$ lớn nhất khi $d(M,(Q))$ lớn nhất.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $I$ và vuông góc với $(Q)$. Phương trình $\Delta:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2t \end{cases}$.

$M=\Delta\cap(S)$, ta được $M_1(3;3;-2)$, $M_2(-1;1;2)$

Vì $d(M_1,(Q))=\dfrac{20}{3}; d(M_2,(Q))=\dfrac{2}{3}$ nên nhận $M_1$.

$P=a+2b+3c=3$.

**Câu 28.** **[HK2 Chuyên Nguyễn Huệ-HN]** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ và tạo với trục $Oy$ góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng $(P)$?

**A.** $N(-1;-2;-1)$. **B.** $F(1;2;1)$. **C.** $E(-3;0;4)$. **D.** $M(3;0;2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có VTCP của đường thẳng $d$ là $\vec{u_d}=(1;-1;-2)$ và VTCP của trục $Oy$ là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Gọi $\alpha$ là góc giữa $d$ và $Oy$, ta có $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u_d}.\vec{j}|}{|\vec{u_d}||\vec{j}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\neq 0$ với

Gọi $\beta$ là góc giữa mặt phẳng $(P)$ và $Oy$, do $(P)$ chứa $d$ nên ta có $\beta\le\alpha$. Dấu bằng xảy ra khi mặt phẳng $(P)$ tạo với $Oy$ một góc $\beta$ thỏa mãn $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

$(P)$ chứa $d$ nên $(P)$ có dạng $m(x+y+1)+n(2x+z-2)=0,\ m^2+n^2>0$

$\Leftrightarrow (m+2n)x+my+nz+m-2n=0,\ m^2+n^2>0$

$\sin\beta = \dfrac{|m|}{\sqrt{(m+2n)^2+m^2+n^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow 4m^2+20mn+25n^2=0 \Leftrightarrow 2m+5n=0$.

Chọn $m=5,\ n=-2$ suy ra phương trình mặt phẳng $(P): x+5y-2z+9=0$.

Vậy điểm $N(-1;-2;-1)\in(P)$.

**Câu 29.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;-1), B(-1;2;0), C(3;-1;-2)$. Giả sử $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=861$ sao cho $P=2MA^2-7MB^2+4MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của $T=|a|+|b|+|c|$ là

**A.** $T=49$. **B.** $T=47$. **C.** $T=55$. **D.** $T=51$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Đề gốc là nhỏ nhất !**

Ta có $P=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-7\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$.

Gọi $I$ là điểm thỏa $2\overrightarrow{IA}-7\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow I(-21;16;10)$.

Khi đó $P=-MI^2+\underbrace{2IA^2-7IB^2+4IC^2}_{const}$. Để $P$ đạt giá trị lớn nhất $\Rightarrow MI_{\min}$.

Nhận xét $I\in(S)$. Do đó $MI_{\min}\Leftrightarrow M\equiv I$ hay $M(-21;16;10)\Rightarrow T=47$.

**Câu 30.** **(TRƯỜNG THPT YÊN KHÁNH A)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(7;-2;3)$ và đường thẳng $(d)$ có phương trình: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi $I$ là điểm thuộc $(d)$ sao cho $AI+BI$ nhỏ nhất. Hoành độ của điểm $I$ là:

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta viết lại phương trình $(d)$ dưới dạng tham số: $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-2t \\ z=2+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

$I\in(d)\Leftrightarrow I(-1+3t;2-2t;2+2t)$

□*Cách 1*:

$\Rightarrow AI+BI=\sqrt{(3t-2)^2+(-2t)^2+(3+2t)^2}+\sqrt{(3t-8)^2+(4-2t)^2+(2t-1)^2}$

$=\sqrt{17t^2+13}+\sqrt{17t^2-68t+81}$

$=\sqrt{17\left(t^2+\dfrac{13}{17}\right)}+\sqrt{17\left[(t-2)^2+\dfrac{13}{17}\right]}$

$=\sqrt{17}.\left[\sqrt{t^2+\left(\sqrt{\dfrac{13}{17}}\right)^2}+\sqrt{(2-t)^2+\left(\sqrt{\dfrac{13}{17}}\right)^2}\right]$.

Tới đây, ta chứng minh bổ đề sau, còn có tên là BĐT *Minkowski*:

$$\boxed{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\ (1)\ \forall a,\ b,\ c,\ d.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ac+bd \ge 0 \\ ad = bc \end{cases}$.

*Chứng minh*:

Thật vậy, với mọi $a,\ b,\ c,\ d$,

$$(1) \Leftrightarrow a^2+b^2+2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}+c^2+d^2 \ge a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} \ge ac+bd \quad (2).$$

□<u>TH1:</u> Nếu $ac+bd<0$ thì $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} > ac+bd$, tức là $(2)$ hiển nhiên đúng.

□<u>TH2:</u> Nếu $ac+bd \ge 0$ thì $(2) \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \ge \left(ac+bd\right)^2 \Leftrightarrow \left(ad-bc\right)^2 \ge 0$ (đúng).

Vậy $(1)$ đã được chứng minh. Rõ ràng, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ac+bd \ge 0 \\ ad = bc \end{cases}$.

Quay trở lại bài toán. Áp dụng $(1)$, ta được:

$$\sqrt{t^2+\left(\sqrt{\frac{13}{17}}\right)^2}+\sqrt{\left(2-t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{13}{17}}\right)^2} \ge \sqrt{\left(t+2-t\right)^2+\left(2\sqrt{\frac{13}{17}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{17}}.$$

$\Rightarrow AI+BI \ge 2\sqrt{30}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} t\left(2-t\right)+\dfrac{13}{17} \ge 0 \\ \sqrt{\dfrac{13}{17}}.t = \sqrt{\dfrac{13}{17}}.\left(2-t\right) \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow I\left(2;0;4\right)$.

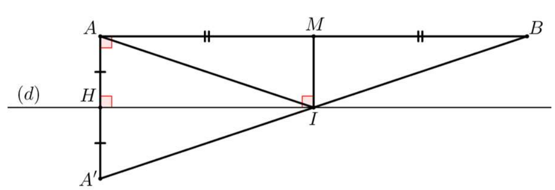
Vậy hoành độ của điểm $I$ là 2.

□<u>*Cách 2*</u>:

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(6;-4;4\right)$ và một VTCP của $(d)$ là $\overrightarrow{u_{(d)}}=\left(3;-2;2\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=2.\overrightarrow{u_{(d)}}$.

Mà $A \notin (d)$ nên $AB \,//\, (d)$.

$\Rightarrow AB$, $(d)$ đồng phẳng và hai điểm $A$, $B$ nằm cùng phía với $(d)$.




Gọi $M\left(4;0;1\right)$ là trung điểm $AB$ và $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua $(d)$.

$\Rightarrow IA+IB=IA'+IB \ge A'B$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow I$ là giao điểm của $AB$ và $(d)$.

Dễ thấy khi đó $MI \perp (d)$ hay $I$ là hình chiếu của $M$ trên $(d)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{u_{(d)}}=0 \Leftrightarrow 3\left(3t-5\right)-2\left(2-2t\right)+2\left(1+2t\right)=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow I\left(2;0;4\right)$.

Vậy hoành độ của điểm $I$ là 2.

**Câu 31.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;9)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=25$. Gọi $(C)$ là giao tuyến của $(S)$ với mặt phẳng $(Oxy)$. Lấy hai điểm $M,N$ trên $(C)$ sao cho $MN=2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng $MN$ đi qua điểm nào trong số các điểm dưới đây?

**A.** $(4;6;0)$. **B.** $\left(\frac{12}{5};-3;0\right)$. **C.** $(5;5;0)$. **D.** $\left(-\frac{1}{5};4;0\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

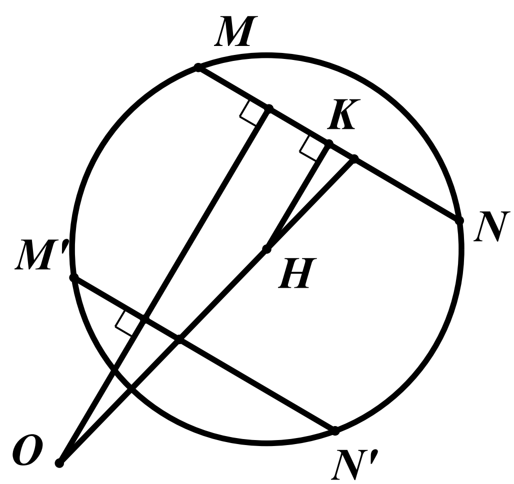
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(3;4;4)$, bán kính $R=5$. Gọi $r_C$ là bán kính đường tròn $(C)$.

Gọi $H$ là tâm đường tròn $(C) \Rightarrow H(3;4;0), IH\perp(Oxy)$, $d(I,(Oxy))=4$.

$r_C=\sqrt{5^2-4^2}=3$, $OH=5 \Rightarrow O$ nằm ngoài đường tròn $(C)$, $d(A,(Oxy))=9$

$V_{OAMN}=\frac{1}{3}d(A,(Oxy)).S_{OMN} = 3S_{OMN}=3.\frac{1}{2}d(O,MN).MN=3\sqrt{5}.d(O,MN)$

Suy ra $V_{max} \Leftrightarrow d(O,MN)_{max}$




Mà $d(O,MN)\le OH+HK=5+\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=7$. (Với $K$ là trung điểm $MN$)

Dấu bằng xảy ra khi $OH\perp MN$. Khi đó $MN$ có 1 véc tơ chỉ phương là

$\left[\overrightarrow{OH};\vec{k}\right]=(4;-3;0),\left(\overrightarrow{OH}=(3;4;0),\vec{k}=(0;0;1)\right)$ và đi qua trung điểm $K$ của $MN$.

$\overrightarrow{OK}=\frac{7}{5}\overrightarrow{OH}\Rightarrow K\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5};0\right)$

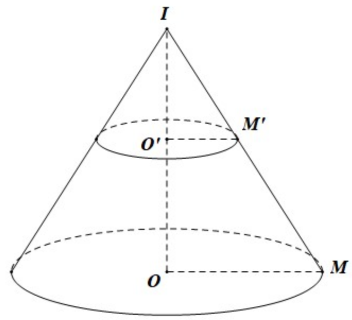
Phương trình đường thẳng $MN:\begin{cases}x=\frac{21}{5}+4t\\ y=\frac{28}{5}-3t \xrightarrow{t=\frac{1}{5}} (5;5;0)\\ z=0\end{cases}$

**Câu 32.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón có đỉnh $I$ thuộc mặt phẳng $(P):2x-y-2z-7=0$ và hình tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(R):2x-y-2z+8=0$. Mặt phẳng $(Q)$ đi qua điểm $A(0;-2;0)$ và vuông góc với trục của hình nón chia hình nón thành hai phần có thể tích lần lượt là $V_1$ và $V_2$ ($V_1$ là thể tích của hình nón chứa đỉnh $I$ ). Biết bằng biểu thức $S=V_2+\dfrac{78}{V_1^3}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $V_1=a$, $V_2=b$. Khi đó tổng $a^2+b^2$ bằng

**A.** $2031$.  **B.** $2031\pi^2$.  **C.** $52\sqrt{3}\pi^2$.  **D.** $377\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Dễ thấy $(P)//(R)$, gọi $O$ là tâm của đường tròn đáy hình nón, $O'=IO\cap(Q)$, từ giả thiết ta có $IO'=d\left(A,(P)\right)=\dfrac{5}{3}$; $OO'=d\left(A,(R)\right)=\dfrac{10}{3}$ suy ra $OO'=2IO'$.

Gọi $M$ là điểm thuộc đường tròn $(O)$, $M'=IM\cap(Q)$, do $O'M'//OM$ nên $\dfrac{IO'}{IO}=\dfrac{O'M'}{OM}=\dfrac{1}{3}$.

Do đó $r_2=3r_1$, (trong đó $r_1$ và $r_2$ lần lượt là bán kính của các đường tròn $(O')$ và $(O)$). Đặt $IO'=h$, khi đó

$$\frac{V_1}{V}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2h}{\frac{1}{3}\pi(3r_1)^2.3h}=\frac{1}{27}\Rightarrow V=27V_1\Rightarrow V_2=V-V_1=26V_1.$$

$$S=V_2+\frac{78}{V_1^3}=26V_1+\frac{78}{V_1^3}=\frac{26}{3}V_1+\frac{26}{3}V_1+\frac{26}{3}V_1+\frac{78}{V_1^3}\ge 4\sqrt[4]{\frac{26}{3}V_1.\frac{26}{3}V_1.\frac{26}{3}V_1.\frac{78}{V_1^3}}=4\sqrt[4]{\frac{456976}{9}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{26}{3}V_1=\dfrac{78}{V_1^3}\Leftrightarrow V_1=\sqrt{3}$. Suy ra $\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=26\sqrt{3}\end{cases}$.

Vậy $a^2+b^2=3+26^2.3=2031$.

**Câu 33.** **(Trường THPT Thăng long Hà Nội)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):(m+2n)x+(m-n)y-(m-2n)z+3m=0$ ($m$, $n$ là tham số) và điểm $A(0;-1;-1)$. Khoảng cách lớn nhất từ $A$ đến $(P)$ bằng

**A.** $3\sqrt{3}$.  **B.** $\sqrt{3}$.  **C.** $2\sqrt{2}$.  **D.** $\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Cách 1: Phương pháp đại số.

Điều kiện để tồn tại $(P)$ là: $(m+2n)^2+(m-n)^2+(m-2n)^2>0\Leftrightarrow 3m^2-2mn+9n^2>0$ $(*)$.

Khi đó, $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{\left|-(m-n)+(m-2n)+3m\right|}{\sqrt{(m+2n)^2+(m-n)^2+(m-2n)^2}}=\dfrac{|3m-n|}{\sqrt{3m^2-2mn+9n^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{9m^2-6mn+n^2}{3m^2-2mn+9n^2}}=\sqrt{\dfrac{3\left(3m^2-2mn+9n^2\right)-26n^2}{3m^2-2mn+9n^2}}$

$=\sqrt{3-\dfrac{26n^2}{3m^2-2mn+9n^2}}\le\sqrt{3}\quad\forall m,\ n$ thỏa mãn $(*)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}n=0\\m\ne 0\end{cases}$.

Vậy $\max d\left(A;(P)\right)=\sqrt{3}$.

□Cách 2: Phương pháp hình học.

Ta viết lại phương trình $(P)$ thành $m.(x+y-z+3)+n.(2x-y+2z)=0$ (ĐK: $m^2+n^2>0$).

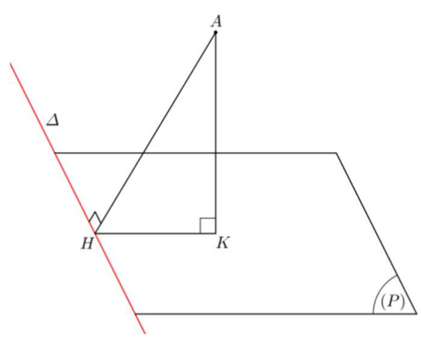
$\Rightarrow(P)$ là chùm mặt phẳng quay quanh đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x+y-z+3=0\\2x-y+2z=0\end{cases}\ (I)$.

$\Delta$ có một VTCP $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(1;-4;-3)$, với $\overrightarrow{n_1}=(1;1;-1)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;2)$.

Mặt khác, cho $z=0$ thì $(I)$ trở thành: $\begin{cases}x+y=-3\\2x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$.

$\Rightarrow\Delta$ đi qua điểm $B(-1;-2;0)$.

Do $(P)$ là chùm mặt phẳng quay quanh $\Delta$ nên $d\left(A;(P)\right)\le d\left(A;\Delta\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.




Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]=(7;-2;5)\Rightarrow\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{7^2+(-2)^2+5^2}}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-3)^2}}=\sqrt{3}$.

Vậy $\max d\left(A;(P)\right)=\sqrt{3}$.

**Câu 34.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$ và hai điểm $A\left(-2;0;-2\sqrt{2}\right)$, $B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm $M$ thuộc $(S)$ sao cho $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

**A.** $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I\left(-2;1;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=3$.

Với mọi điểm $M(x;y;z)\in(S)$ ta có $MI=3$.

Theo đề bài $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IO}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=16$.

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IO}\right)+\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IB}=16\,(*)$.

Có $\overrightarrow{IA}=\left(0;-1;-\sqrt{2}\right),\overrightarrow{IO}=\left(2;-1;\sqrt{2}\right),\overrightarrow{IB}=\left(-2;-5;\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{MI}=\left(-2-x;1-y;-\sqrt{2}-z\right)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IO}=\left(0;-8;0\right)$, $\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IO}\right)=8(y-1)$, $\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IB}=3$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow 2.9+3+8(y-1)+3=16\Leftrightarrow y=0$ hay $M$ thuộc mặt phẳng $(P): y=0$.

Tập hợp điểm $M$ là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt cầu $(S)$.

Do $d(I;(P))=1$ suy ra bán kính của đường tròn $r=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

**Cách 2.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I\left(-2;1;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=3$. Gọi $M\left(x;y;z\right)$.

$M\in(S)\Rightarrow\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2=0$ (1)

$MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16\Leftrightarrow\left(x+2\right)^2+y^2+\left(z+2\sqrt{2}\right)^2+x\left(x+4\right)+y\left(y+4\right)+z^2=16$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x+2y+2\sqrt{2}z-2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2=0\\x^2+y^2+z^2+4x+2y+2\sqrt{2}z-2=0\end{cases}$

$\Rightarrow y=0$ hay $M$ thuộc mặt phẳng $(P): y=0$.

Tập hợp điểm $M$ là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt cầu $(S)$.

Do $d(I;(P))=1$ suy ra bán kính của đường tròn $r=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

**Câu 35.** **(HSG-Đà Nẵng-11-03-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A\left(5;3;1\right)$, $B\left(4;-1;3\right)$, $C\left(-6;2;4\right)$ và $D\left(2;1;7\right)$. Biết rằng tập hợp các điểm $M$ thỏa $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là một mặt cầu $\left(S\right)$. Xác định tọa độ tâm $I$ và tính bán kính $R$ của mặt cầu $\left(S\right)$.

**A.** $I\left(\frac{4}{3};1;\frac{2}{3}\right)$, $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
**B.** $I\left(\frac{1}{3};\frac{14}{3};\frac{2}{3}\right)$, $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.
**C.** $I\left(1;\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right)$, $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.
**D.** $I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$, $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$AB=\sqrt{\left(4-5\right)^2+\left(-1-3\right)^2+\left(3-1\right)^2}=\sqrt{21}$.

Gọi $K\left(x;y;z\right)$ là điểm thỏa mãn điều kiện $3\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$.

Suy ra: $\begin{cases}3\left(5-x\right)-2\left(4-x\right)+\left(-6-x\right)+\left(2-x\right)=0\\3\left(3-y\right)-2\left(-1-y\right)+\left(2-y\right)+\left(1-y\right)=0\\3\left(1-z\right)-2\left(3-z\right)+\left(4-z\right)+\left(7-z\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\frac{14}{3}\\z=\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow K\left(1;\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Ta lại có: $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

$\Leftrightarrow \left|3\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)-2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC}\right)+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD}\right)\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|$

$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MK}+\left(3\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)\right|=BA \Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MK}+\vec{0}\right|=BA$

$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MK}\right|=BA \Leftrightarrow 3MK=BA \Leftrightarrow MK=\dfrac{BA}{3} \Leftrightarrow MK=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

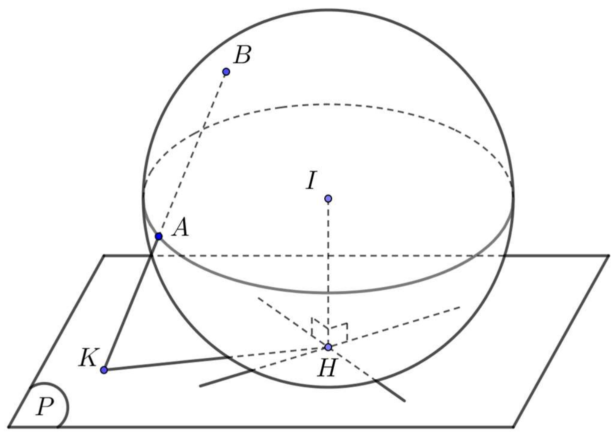
Từ đó tập hợp điểm $M$ là mặt cầu $(S)$ tâm $I \equiv K\left(1;\dfrac{14}{3};\dfrac{8}{3}\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

**Câu 36.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 2;\ 1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+2z=0$. Mặt cầu $(S)$ thay đổi đi qua hai điểm $A$, $B$ và tiếp xúc với $(P)$ tại $H$. Biết $H$ chạy trên một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

**A.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Đường thẳng $AB$ có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(1;\ 1;\ 0)$ và đi qua điểm $A(1;\ 1;\ 1)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$.

Gọi $K=AB\cap(P)$ suy ra $K(1+t;\ 1+t;\ 1)$. Do $K\in(P)\Rightarrow 1+t+1+t+2=0 \Leftrightarrow 2t=-4 \Leftrightarrow t=-2$

$\Rightarrow K(-1;\ -1;\ 1)$.

Ta được $KA=2\sqrt{2}$, $KB=3\sqrt{2}$.

Do mặt cầu $(S)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ và $H$ là tiếp điểm của $(S)$ với $(P)$ nên:

$KA.KB=KH^2 \Rightarrow KH=2\sqrt{3}$.

Vì $K$ là điểm cố định thuộc $(P)$, $H\in(P)$ và $HK=2\sqrt{3}$ không đổi nên điểm $H$ thuộc đường tròn cố định có tâm là điểm $K$, bán kính $r=2\sqrt{3}$ trên mặt phẳng $(P)$.

Vậy bán kính đường tròn cố định cần tìm là $r=2\sqrt{3}$.

**Câu 37.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng $\Delta$ qua

$M$, nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ cắt $(S)$ tại $A, B$ sao cho độ dài $AB$ lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng $\Delta$.

**A.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$.

**B.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

**C.** $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$.

**D.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$.

$d(I,(\alpha))=\frac{|2.2-2.3+5+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=6<R \Rightarrow (\alpha)\cap(S)=C(H;r), H$ là hình chiếu của $I$ lên $(\alpha)$.

Gọi $\Delta_1$ là đường thẳng qua $I$ và vuông góc với $(\alpha)$ $\Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(2;-2;1)$.

$\Rightarrow$PTTS $\Delta_1:\begin{cases}x=2+2t\\y=3-2t\\z=5+t\end{cases}$. Tọa độ $H$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=2+2t\\y=3-2t\\z=5+t\\2x-2y+z+15=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=7\\z=3\end{cases} \Rightarrow H(-2;7;3)$.

Ta có $AB$ có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C)$ $\Leftrightarrow \Delta\equiv MH$.

Đường thẳng $MH$ đi qua $M(-3;3;-3)$ và có VTCP $\overrightarrow{MH}=(1;4;6)$.

Suy ra phương trình $\Delta:\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

**Câu 38.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$ và mặt phẳng $(P)$ có phương trình $2x-y-2z+2019=0$. Gọi $(Q)$ là mặt phẳng đi qua hai điểm $A, B$ và $\alpha$ là góc nhỏ nhất giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$. Giá trị $\cos\alpha$ là

**A.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**B.** $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

**C.** $\cos\alpha=\frac{1}{9}$.

**D.** $\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{6}}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi mặt phẳng $(Q): ax+by+cz+d=0$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(a;b;c)$

Trong đó $a^2+b^2+c^2\neq 0$

Mặt phẳng $(P)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;2)$

Mặt phẳng $(Q)$ đi qua $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$ ta có $\begin{cases}a+2b-c+d=0 & (1)\\4b+d=0 & (2)\end{cases}$

Lấy $(1)-(2)$ ta được $c=a-2b; d=-4b$

$\Rightarrow$ $(Q)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(a;b;a-2b)$

$\alpha$ là Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ trong đó $0\le\alpha\le 90^0$ $\cos\alpha=\frac{|3b|}{3\sqrt{2a^2+5b^2-4ab}}$

Trường hợp 1: $b=0$ ta có $\alpha=90^0$ là góc lớn nhất trong các góc có thể có giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$

Trường hợp 2: $b \neq 0$ ta có $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{b^2}{2a^2+5b^2-4ab}} = \sqrt{\dfrac{1}{2\left(\dfrac{a}{b}-1\right)^2+3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha$ nhỏ nhất khi $\cos\alpha$ lớn nhất. Vậy $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Câu 39.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t;2t;0)$, $B(0;0;t)$ (với $t>0$). cho điểm $P$ di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\dfrac{a}{b}$ với $a,b$ nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản sao cho $OP$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q=2a+b$ bằng

**A.** 5 **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $P(x;y;z)$, ta có: $\overrightarrow{OP}=(x;y;z), \overrightarrow{AP}=(x-2t;y-2t;z), \overrightarrow{BP}=(x;y;z-t)$

Vì $P(x;y;z)$ thỏa mãn

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-4tx-4ty-2tz-3=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\dfrac{4}{3}tx-\dfrac{4}{3}ty-\dfrac{2}{3}tz-1=0$

Nên $P$ thuộc mặt cầu tâm $I\left(\dfrac{2t}{3};\dfrac{2t}{3};\dfrac{t}{3}\right)$, $R=\sqrt{t^2+1}$

Ta có $OI=t<R$ nên O thuộc phần không gian phía trong mặt cầu.

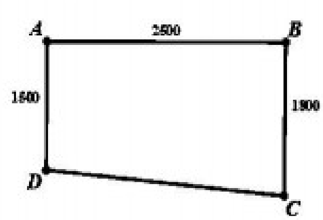
Để $OP_{\max}$ thì $P,I,O$ thẳng hàng và $OP=OI+R$

Suy ra $OP_{\max}=OI+R \Leftrightarrow 3=t+\sqrt{t^2+1}$

Từ đó tìm được $t=\dfrac{4}{3}$ Suy ra $a=4, b=3$

Vậy, $Q=2a+b=11$

**Câu 40.** **(THPT Chuyên Lam Sơn - lần 2- NĂM HỌC 2018 – 2019)** Một phần sân trường được định vị bởi các điểm $A$, $B$, $C$, $D$ như hình vẽ.

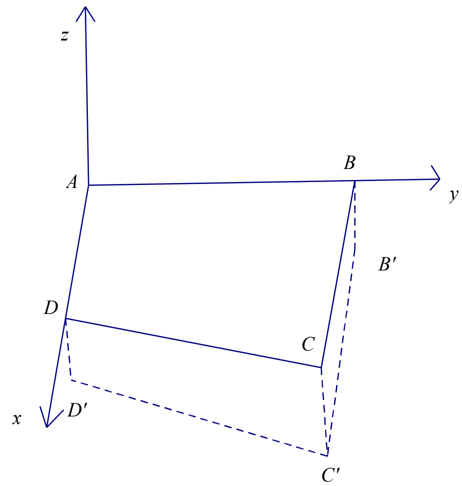



Bước đầu chúng được lấy " thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở $A$ và $B$ với độ dài $AB=25\,\text{m}$, $AD=15\,\text{m}$, $BC=18\,\text{m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở $C$ nên người ta lấy độ cao ở các điểm $B$, $C$, $D$ xuống thấp hơn so với độ cao ở $A$ là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng. Giá trị của $a$ là số nào sau đây?

**A.** $17,2\,\text{cm}$. **B.** $18,1\,\text{cm}$. **C.** $17,5\,\text{cm}$. **D.** $15,7\,\text{cm}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó, $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm $B$, $C$, $D$ xuống thấp hơn so với độ cao ở $A$ là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$.

Theo bài ra có bốn điểm $A$; $B'$; $C'$; $D'$ đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D'): x+y+250z=0$.

Do $C'(1800;\,2500;-a) \in (AB'D')$ nên có: $1800+2500-250a=0 \Leftrightarrow a=17,2$.

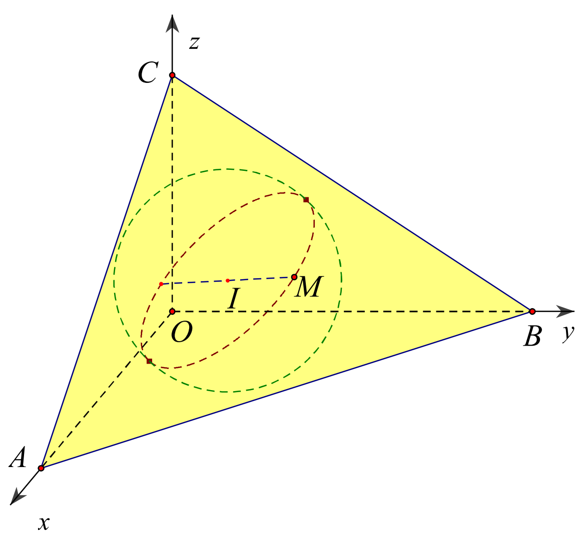
Vậy $a=17,2\,\text{cm}$.

**Câu 41.** **(TRƯỜNG THPT YÊN KHÁNH A)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M \in (S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với $(S)$ tại $M$ cắt các tia $Ox$ ; $Oy$; $Oz$ tại các điểm $A$, $B$, $C$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là:

**A.** 24. **B.** 27. **C.** 64. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn C**




$(S)$ có tâm $(O)$ và bán kính $R=1$.

Theo đề bài ta có $A(a,0,0);B(0,b,0);C(0,0,c)$; $(a,b,c>0)$ khi đó phương trình mặt phẳng $(P)$ là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

$(P)$ tiếp xúc với $(S)$ tại $M\in(S)\Leftrightarrow d(O;(P))=1\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=1$

$\Leftrightarrow abc=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geq\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\Rightarrow abc\geq 3\sqrt{3}\quad(1)$ vì $(a,b,c>0)$.

Khi đó: $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$

$\Rightarrow T=1+a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2=1+a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c^2$

Mặt khác $1+a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c^2\geq 1+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+2a^2b^2c^2\geq 64\quad(2)\Rightarrow T\geq 64$.

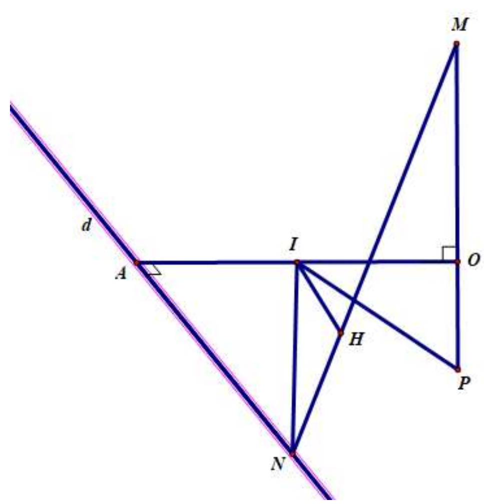
Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 64 khi $(1)$ và $(2)$ xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

**Câu 42.** **(Sở GD- ĐT Quảng Nam)** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=4-3t\\y=3+4t\\z=0\end{cases}$. Gọi $A$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên $d$. Điểm $M$ di động trên tia $Oz$, điểm $N$ di động trên đường thẳng $d$ sao cho $MN=OM+AN$. Gọi $I$ là trung điểm đoạn thẳng OA. Trong trường hợp diện tích tam giác $IMN$ đạt giá trị nhỏ nhất, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(M,d)$ có tọa độ là

**A.** $(4;3;10\sqrt{10})$. **B.** $(4;3;10\sqrt{2})$. **C.** $(4;3;5\sqrt{10})$. **D.** $(4;3;5\sqrt{2})$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $A(4-3t;3+4t;0)$ là hình chiếu vuông góc của $O$ trên $d$

$\Leftrightarrow OA\perp d\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow A(4;3;0)$.

Trên $Oz$ lấy điểm $P$ sao cho $OP=AN\Rightarrow MP=OM+OP=MN$

và $\Delta AIN=\Delta OIP\Rightarrow IN=IP$

Ta có $\Delta IMP=\Delta IMN$, kẻ $IH\perp MN\Rightarrow IH=IO\Rightarrow S_{\Delta IMN}=\frac{1}{2}IH.MN\Rightarrow S_{\Delta IMN}\min\Leftrightarrow MN_{\min}$

Ta có $MN^2=MO^2+OA^2+AN^2\geq 2\left(\frac{MO+AN}{2}\right)^2+25\Rightarrow MN\geq 5\sqrt{2}$

Vậy $MN_{\min} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow OM = AN = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M\left(0;0;\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(M,\text{d})$ là $\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u_d}\right] = \left(10\sqrt{2};\dfrac{15}{\sqrt{2}};25\right)$

Chọn $\vec{n} = \left(4;3;5\sqrt{2}\right)$

**------------- HẾT -------------**

**Câu 1.** Tính tổng $S=C_{2019}^{0}-C_{2019}^{1}+C_{2019}^{2}-C_{2019}^{3}+...+C_{2019}^{98}-C_{2019}^{99}+C_{2019}^{100}$.

**A.** $C_{2018}^{100}$. **B.** $C_{2019}^{100}+1$. **C.** $C_{2018}^{100}-1$. **D.** $C_{2018}^{100}+1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $C_{2019}^{0}=C_{2018}^{0}=1$

Áp dụng công thức $C_{n}^{k}=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}$ với $1\le k\le n;k,n\in N$.

Ta có $C_{2019}^{1}=C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}$

$C_{2019}^{2}=C_{2018}^{1}+C_{2018}^{2}$

$C_{2019}^{3}=C_{2018}^{2}+C_{2018}^{3}$

......................

$C_{2019}^{100}=C_{2018}^{99}+C_{2018}^{100}$

Thay vào $S$ ta có

$$S=C_{2018}^{0}-\left(C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}\right)+\left(C_{2018}^{1}+C_{2018}^{2}\right)-\left(C_{2018}^{2}+C_{2018}^{3}\right)+...$$
$$-\left(C_{2018}^{98}+C_{2018}^{99}\right)+\left(C_{2018}^{99}+C_{2018}^{100}\right)$$
$$=C_{2018}^{100}.$$

**Câu 2.** Cho $S$ là tập có $5$ phần tử. Hai bạn học sinh $A,B$ lên bảng và mỗi người viết một tập con của $S$. Xác suất để trên bảng có đúng $3$ phần tử của $S$ là.

**A.** $\dfrac{135}{512}$. **B.** $\dfrac{270}{512}$. **C.** $\dfrac{135}{1024}$. **D.** $\dfrac{175}{512}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số tập con của tập có $5$ phần tử là: $2^5=32$ tập con.

Số cách bạn $A,B$ viết hai tập con lên bảng là $n\left(\Omega\right)=32.32=1024$ kết quả.

Gọi $A$:" Hai bạn học sinh $A,B$ lên bảng và mỗi người viết một tập con của $S$ để trên bảng có đúng $3$ phần tử của $S$ ".

TH1: Có một bạn viết tập hợp $\varnothing$, một bạn viết tập có 3 phần tử có: $2.C_5^3=20$ kết quả.

TH2: Có một bạn viết tập hợp một phần tử và một bạn viết tập có 2 phần tử khác phần tử tập đầu có: $C_5^1.C_4^2+C_5^2.C_3^1=60$ kết quả.

TH3: Có một bạn viết tập hợp một phần tử và một bạn viết tập có 3 phần tử trong đó có một phần tử ở tập đầu có: $5.C_4^2+C_5^3.3=60$ kết quả.

TH4: Có một bạn viết tập hợp hai phần tử và một bạn viết tập có 3 phần tử trong đó có hai phần tử ở tập đầu có: $C_5^2.C_3^1+C_5^3.C_3^2=60$ kết quả.

TH5: Hai bạn viết hai tập có $3$ phần tử giống như nhau có: $C_5^3=10$ kết quả.

TH6: Hai bạn viết hai tập có hai phần tử trong đó có một phần tử ở hai tập giống nhau có: $2.C_5^2.C_3^1=60$ kết quả.

Do đó: $n\left(A\right)=20+60+60+60+10+60=270$ kết quả.

Xác suất cần tìm là: $p\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{270}{1024}=\dfrac{135}{512}$.

**Câu 3.** Từ các chữ số thuộc tập $X=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau sao cho mỗi số tự nhiên đó đều chia hết cho 18.

**A.** 984. **B.** 1228. **C.** 720. **D.** 860.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử số lập được có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, $a_1 \neq 0$, $a_i \neq a_j$ với $i \neq j$, $i = \overline{1;6}$, $j = \overline{1;6}$.

Ta có $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} \vdots 18 \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} \vdots 9 \\ \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6) \vdots 9 \\ a_6 \vdots 2 \end{cases}$.

Vì $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6) \vdots 9$ nên ta có các trường hợp sau

Trường hợp 1: $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ được chọn từ $X_1 = \{2;3;4;5;6;7\}$

+ Có 3 cách chọn chọn $a_6$.

+ Có $5!$ cách chọn chọn bộ 5 số $(a_1;a_2;a_3;a_4;a_5)$.

Suy ra có $3.5! = 360$ số.

Trường hợp 2: $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ được chọn từ $X_2 = \{0;1;2;4;5;6\}$

+ $a_6 = 0$, có $5!$ cách chọn bộ 5 số $(a_1;a_2;a_3;a_4;a_5)$.

+ $a_6 \neq 0$ khi đó $a_6$ có 3 cách chọn, $a_1$ có 4 cách chọn và có $4!$ cách chọn bộ 4 số $(a_2;a_3;a_4;a_5)$.

Suy ra có $5! + 3.4.4! = 408$ số.

Trường hợp 3: $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ được chọn từ $X_3 = \{0;1;2;3;5;7\}$

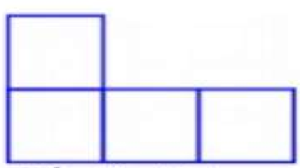
+ $a_6 = 0$, có $5!$ cách chọn bộ 5 số $(a_1;a_2;a_3;a_4;a_5)$.

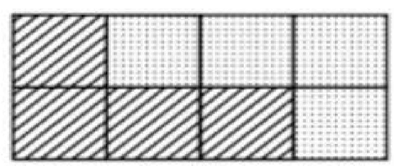
+ $a_6 \neq 0$ khi đó $a_6$ có 1 cách chọn, $a_1$ có 4 cách chọn và có $4!$ cách chọn bộ 4 số $(a_2;a_3;a_4;a_5)$.

Suy ra có $5! + 1.4.4! = 216$ số.

Vậy có $360 + 408 + 216 = 984$ số.

**Câu 4.** Trong một hộp có chứa các tấm bìa dạng hình chữ nhật có kích thước đôi một khác nhau, các cạnh của hình chữ nhật có kích thước là $m$ và $n$ ($m,n \in \mathbb{N}; 1 \leq m,n \leq 20$, đơn vị là cm). Biết rằng mỗi bộ kích thước *(m,n)* đều có tấm bìa tương ứng. Ta gọi một tấm bìa là "tốt" nếu tấm bìa đó có thể được lắp ghép từ các miếng bìa dạng hình chữ $L$ gồm 4 ô vuông, mỗi ô có độ dài cạnh là 1cm để tạo thành nó.


Miếng bìa chữ L


Một tấm bìa tốt kích thước

Rút ngẫu nhiên một tấm bìa từ hộp, tính xác suất để rút được tấm bìa "tốt".

**A.** $\frac{2}{7}$ **B.** $\frac{29}{95}$ **C.** $\frac{29}{105}$ **D.** $\frac{9}{35}$

**Lời giải**

**Chọn C**

**Số hình chữ nhật trong hộp:**

+) m =1 thì n = 1,2,3… 20.

+) m =2 thì n = 2,3.4…20

…..

+) m =20 thì n = 20.

$\Rightarrow n(\Omega) = 20 + 19 + ... + 1 = \frac{20}{2}(20+1) = 210$

Ta đi tìm số hình chữ nhật "Tốt". Do mỗi miếng bìa có hình chữ L, một chiều gồm 2 hình vuông đơn vị, một chiều gồm 3 hình vuông đơn vị và diện tích của mỗi miếng bìa bằng 4cm$^2$, nên hình chữ nhật n.m là tốt khi và chỉ khi nó được tạo bởi 2,4,6,… số chẵn miếng bìa hình chữ L

như trên. Khi đó m.n = 8,16,24,…. Do đó m, n thỏa mãn: $\begin{cases} m \ge 3; n \ge 2 \\ m.n \vdots 8 \\ m,n \in \mathbb{N}^*; \text{m, n} \le 20 \end{cases}$

suy ra phải có ít nhất một trong hai số m, n chia hết cho 4.
Do hình chữ nhật kích thước cũng chính là hình chữ nhật nên ta chỉ cần xét với kích thước m.
**KN1: m chia hết cho 8:** $m \in \{8,16\}$ khi đó ta chọn n bất kì thuộc tập $\{2,3,...20\}$ suy ra có 19 + 18 = 37 tấm bìa "tốt".
**KN2: m ko chia hết cho 8:** $m \in \{4,12,20\}$. Do 4 = 4.1; 12 = 4.3; 20 = 4.5 nên muốn m.n chia hết cho 8 thì n phải chẵn.
Tập $\{2,4,6,10,12,14,18,20\}$ có 8 phần tử.
m = 4 có 8 cách chọn n
m = 12 có 8 – 1 = 7 cách chọn n đã chọn ở trên.
m = 20 có 8 – 2 = 6 cách chọn n. và đã chọn ở trên.
Vậy **KN2** có 8 + 7 + 6 = 21 tấm bìa "tốt".

Gọi A là biến cố rút được tấm bìa "tốt" từ hộp $\Rightarrow n(A) = C_{58}^1 = 58 \Rightarrow P(A) = \dfrac{58}{210} = \dfrac{29}{105}$

**Câu 5.** Cho tập $S$ có 12 phần tử. Hỏi có bao nhiêu cách chia tập hợp $S$ thành hai tập con (không kể thứ tự) mà hợp của chúng bằng $S$?

**A.** $3^{12}-1$. **B.** $\dfrac{3^{12}-1}{2}$. **C.** $3^{12}+1$. **D.** $\dfrac{3^{12}+1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Bước 1:** Phân hoạch tập $S$ thành hai tập $A$ và $B$ rời nhau.
**Bước 2:** Giả sử tập $A$ có $k$ phần tử, có $C_{12}^k$ cách chọn tập $A$. Khi đó ta bổ sung $B$ vào $l$ phần tử để $A \cup B = S$ có $C_k^l$ cách bổ sung như thế.
**Bước 3:** Vì vai trò của $A$ và $B$ như nhau nên có sự lặp lại 2 lần, riêng tập có 6 phần tử chỉ lặp lại 1 lần.

Do đó số cách chọn là: $\dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12}\sum_{l=0}^{k} C_{12}^k C_k^l + 1\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12} 2^k C_{12}^k + 1\right) = \dfrac{3^{12}+1}{2}$.

**Câu 6.** **(SGD Nam Định_Lần 1_2018-2019)** Gọi $S$ là tập hợp các số tự nhiên có 7 chữ số, lấy ngẫu nhiên một số từ tập $S$. Xác suất để số lấy được có chữ số tận cùng là 3 và chia hết cho 7 có kết quả gần nhất với số nào trong các số sau?

**A.** $0,128$. **B.** $0,035$. **C.** $0,014$. **D.** $0,012$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9.10^6 = 9000000$.

Cách 1

Gọi $A$ là biến cố lấy được số có chữ số tận cùng là 3 và chia hết cho 7.

Số tự nhiên có 7 chữ số có chữ số tận cùng là 3 và chia hết cho 7có dạng $\overline{N3}$, trong đó $N$ là số tự nhiên có 6 chữ số.

Ta có $\overline{N3} = \overline{N0} + 3 = 10N + 3 = 7N + 3N + 3$.

Do $\overline{N3}$ chia hết cho 7 nên $3N + 3 = 7k \Leftrightarrow N = 2k + \dfrac{k-3}{3}$

$N$ là số tự nhiên khi và chỉ khi $\dfrac{k-3}{3} = m \Leftrightarrow k = 3m + 3, m \in \mathbb{N}$.

Khi đó $N = 7m + 6, m \in \mathbb{N}$.

Do $100000 \le N \le 999999 \Leftrightarrow 100000 \le 7m+6 \le 999999 \Leftrightarrow \frac{99994}{7} \le m \le \frac{999993}{7}$.

Do $m \in \mathbb{N}$ nên $14285 \le m \le 142856$. Suy ra có 128572 giá trị $m$ thỏa mãn.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ là $n(A) = 128572$.

Xác suất của biến cố $A$ là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{128572}{9000000} \approx 0,014$.

Cách 2

Gọi A là biến cố lấy được số có chữ số tận cùng là 3 và chia hết cho 7.

Ta có phần tử nhỏ nhất của $A$ là $a = 1000023$.

Gọi $b$ là phần tử bất kỳ của $A$. Do $b$ có chữ số tận cùng là 3 nên $b-a$ chia hết cho 10.

Mặt khác $a,b$ đều chia hết cho 7 nên $b-a$ chia hết cho 7.

Ta có $[7,10] = 70$ nên $b - a = 70m \Leftrightarrow b = a + 70m = 1000023 + 70m, m \in \mathbb{N}$.

Do $b \le 9999999$ nên $1000023 + 70m \le 9999999 \Leftrightarrow m \le \frac{8999976}{70} \Rightarrow m \le 128571$.

Suy ra có 128572 giá trị $m$ thỏa mãn. Vậy $A$ có 128572 phần tử.

Xác suất của biến cố $A$ là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{128572}{9000000} \approx 0,014$.

**Câu 7.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}u_n$. Tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \ldots + \frac{u_{10}}{10}$ bằng

**A.** $\frac{3280}{6561}$. **B.** $\frac{29524}{59049}$. **C.** $\frac{1}{243}$. **D.** $\frac{25942}{59049}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3n}$ nên

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}.\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\ldots\frac{u_2}{u_1}.u_1 = \frac{n}{3(n-1)}.\frac{n-1}{3(n-2)}\ldots\frac{2}{3.1}.u_1 = \frac{n}{3^n}.$$

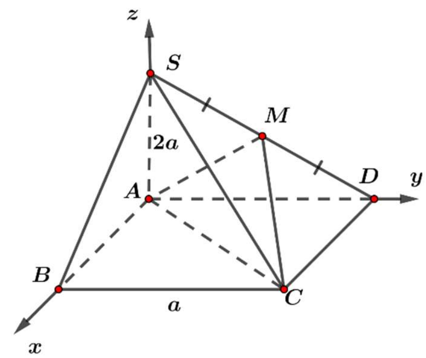
Vậy $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3}.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{29524}{59049}$.

**Câu 8.** **(Nguyễn Khuyến 18-19)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $SD$. Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$ bằng

**A.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Để thuận tiện trong việc tính toán ta chọn $a = 1$.

Trong không gian, gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho gốc $O$ trùng với điểm $A$, tia $Ox$ chứa đoạn thẳng $AB$, tia $Oy$ chứa đoạn thẳng $AD$, tia $Oz$ chứa đoạn thẳng $AS$. Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $S(0;0;2)$, $D(0;1;0)$.

Vì $M$ là trung điểm $SD$ nên tọa độ $M$ là $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{SB} = (1;0;-2) \\ \overrightarrow{BC} = (0;1;0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = [\overrightarrow{SB};\overrightarrow{BC}] = (2;0;1)$.

$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \left(0;\frac{1}{2};1\right) \\ \overrightarrow{AC} = (1;1;0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(AMC)} = [\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}] = \left(-1;1;\frac{-1}{2}\right)$

Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$.

Suy ra $\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{n}_{(SBC)};\vec{n}_{(AMC)}\right)\right| = \frac{\left|\vec{n}_{(SBC)}.\vec{n}_{(AMC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|.\left|\vec{n}_{(AMC)}\right|} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Mặt khác, $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$.

Vậy $\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

**Câu 9.** Gieo đồng thời 3 con súc sắc. Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất 2 mặt 6 chấm. Xác suất để trong 6 lần chơi thắng ít nhất 4 lần gần nhất với giá trị nào dưới đây.

**A.** $1,65.10^{-7}$. **B.** $1,24.10^{-5}$ **C.** $3,87.10^{-4}$. **D.** $4.10^{-4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $B$ là biến cố gieo đồng thời 3 súc sắc. Gọi biến cố là $B_1, B_2, B_3$ lần lượt là các biến cố gieo súc sắc 1; 2; 3.

Xác suất để các súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm là $P(B_1) = \frac{1}{6}; P(B_2) = \frac{1}{6}; P(B_3) = \frac{1}{6}$..

Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất 2 mặt 6 chấm nên xác suất là

$P(B) = C_3^2.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} + \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{2}{27}$.

Nên $P(B) = \frac{2}{27}$. Suy ra $P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{27} = \frac{25}{27}$

Gọi $A$ là biến cố "Bạn là người thắng cuộc". Để trong 6 lần chơi thắng ít nhất 4 lần nên ta có

$$P(A)=C_6^4\left(P(B)\right)^4\left(P(\overline{B})\right)^2+C_6^5\left(P(B)\right)^5P(\overline{B})+C_6^6\left(P(B)\right)^6\approx 4.10^{-4}$$

**Câu 10.** Cho tập hợp $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Từ tập hợp $X$ lập được một số tự nhiên có $8$ chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số lập được chia hết cho $1111$ là:

**A.** $\dfrac{A_8^2A_6^2A_4^2}{8!}$. **B.** $\dfrac{4!4!}{8!}$. **C.** $\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^2}{8!}$. **D.** $\dfrac{384}{8!}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số các số tự nhiên lập được từ tập hợp $X$ có $8$ chữ số đôi một khác nhau là: $8!$.

Gọi $n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ là số tự nhiên có $8$ chữ số khác nhau đôi một được lập từ tập hợp $X$ và chia hết cho $1111$.

Dễ thấy: $n=\sum_{i=1}^{8}a_i.10^{8-i}=\sum_{i=5}^{8}a_i.10^{8-i}+\sum_{i=1}^{4}a_i.10^{8-i}$

Với $\sum_{i=1}^{4}a_i.10^{8-i}=\overline{a_1a_2a_3a_4}\times 10^4=9999\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_1a_2a_3a_4}$ và $\sum_{i=5}^{8}a_i.10^{8-i}=\overline{a_5a_6a_7a_8}$.

Do đó: $n\vdots 1111\Leftrightarrow\left(\overline{a_1a_2a_3a_4}+\overline{a_5a_6a_7a_8}\right)\vdots 1111$

$\Leftrightarrow\left[(a_1+a_5).1000+(a_2+a_6).100+(a_3+a_7).10+(a_4+a_8)\right]\vdots 1111$

Đặt $x_i=a_i+a_{i+4}$, với $i=\overline{1,4}$, ta có $3\le x_i\le 15$ với mọi $i=\overline{1,4}$ và

$$\sum_{i=1}^{4}x_i=\sum_{j=1}^{8}a_j=1+2+\cdots+8=36.$$

Hơn nữa, $x_1.1000+x_2.100+x_3.10+x_4=1111.k$ (*), $k$ là số nguyên dương không vượt quá $9$.

Ta nhận thấy chỉ có trường hợp $x_1=x_2=x_3=x_4$ thì (*) thỏa mãn.

Do đó: $x_1=x_2=x_3=x_4=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}=\dfrac{36}{4}=9$.

Suy ra mỗi cặp $(a_i;a_{i+4})\in\{(1;8),(2;7),(3;6),(4;5)\}$.

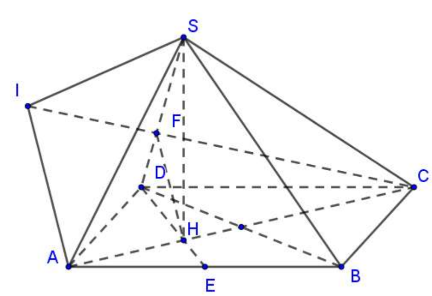
Vậy số số tự nhiên $n\vdots 1111$ là $4!(2!)^4=384$. Suy ra xác suất là $P=\dfrac{384}{8!}$.

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a$, $SA=SB=SD=a$, $\widehat{BAD}=60^\circ$. Góc giữa đường thẳng $SA$ và mp$(SCD)$ bằng

**A.** $30^\circ$. **B.** $90^\circ$. **C.** $45^\circ$. **D.** $60^\circ$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Do $ABCD$ là hình thoi và góc $\widehat{BAD}=60^\circ$ nên $ABD$ là tam giác đều cạnh $a$

Gọi $H$ là trọng tâm tam giác $ABD$. Ta có $DH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vì $SA = SB = SD = a$ nên $SH \perp (ABCD)$. $SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Gọi $F$ là hình chiếu vuông góc của $H$ lên $SD$ khi đó ta có $HF \perp \text{mp}(SCD)$. Tính được

$FH = \dfrac{SH.DH}{SD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Gọi $I$ là hình chiếu của $A$ lên $(SCD)$ khi đó $FH$ song song với $AI$. Ta có $\dfrac{FH}{AI} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{2}{3}$

Nên $AI = \dfrac{3}{2}HF = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

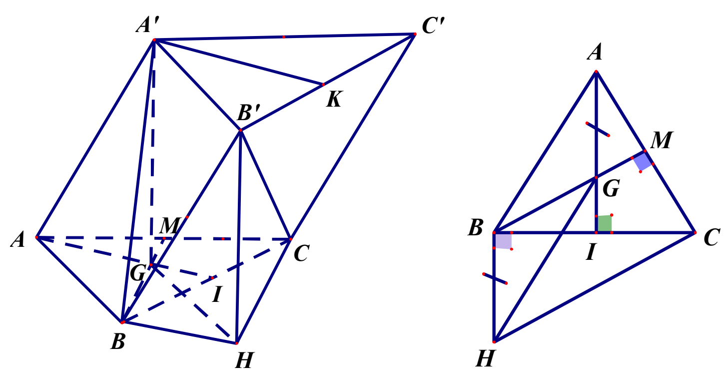
Góc giữa đường thẳng $SA$ và mp$(SCD)$ là góc $\widehat{ASI}$. $\sin\widehat{ASI} = \dfrac{AI}{SA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ASI} = 45°$.

**Câu 12.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác đều có cạnh bằng 4. Hình chiếu vuông góc của $A'$ trên $mp(ABC)$ trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $AC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $BM$ và $B'C$ bằng

**A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $2$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $G$ là trọng tâm tam giác đều $ABC$ $\Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

Ta có $A'G \perp (ABC)$.

Dựng hình chiếu $H$ của $B'$ trên mặt phẳng $(ABC)$ $\Rightarrow$ Tứ giác $ABHG$ là hình bình hành và

$AG = BH = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ và $BH \perp BC$.

Xét tam giác $BHC$ vuông tại $B$ ,ta có: $\tan\widehat{BCH} = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{BCH} = 30°$.

Do đó $\widehat{ACH} = \widehat{ACB} + \widehat{BCH} = 90°$ hay $AC \perp HC$.

Mà $AC \perp B'H$. Do đó: $AC \perp B'C$ tại $C$ hay $MC \perp B'C$ tại $C$ (1)

Ta lại có $MC \perp BM$ tại $M$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow MC$ là đoạn vuông góc chung của $BM$ và $B'C$.

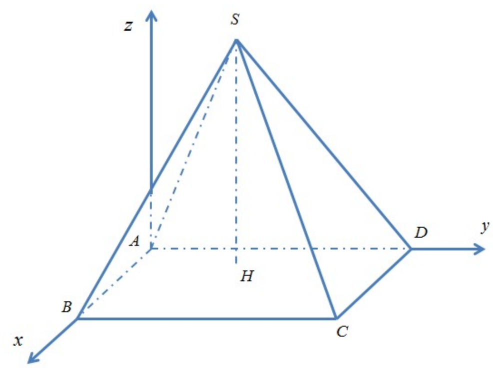
Do đó $d(BM, B'C) = MC = 2$.

**Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hình chiếu vuông góc của đỉnh $S$ xuống mặt đáy nằm trong hình vuông $ABCD$. Hai mặt phẳng $(SAD),(SBC)$ vuông góc với nhau; góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SBC)$ là $60^0$; góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SAD)$ là $45^0$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(ABCD)$. Tính $\cos\alpha$

**A.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.  **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.  **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.  **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát giả sử $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 1, chiều cao của hình chóp $S.ABCD$ bằng $c$ $(c>0)$.

$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$.

Do hình chiếu vuông góc $H$ của đỉnh $S$ xuống mặt đáy nằm trong hình vuông $ABCD$ nên gọi $H(a;b;0)$ với $0<a,b<1$ (*) $\Rightarrow S(a;b;c)$.

Ta có: $\overrightarrow{AS}=(a;b;c)$, $\overrightarrow{AD}=(0;1;0)$ nên chọn $\overrightarrow{n_{(SAD)}}=\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AD}\right]=(-c;0;a)$.

$\overrightarrow{BS}=(a-1;b;c)$, $\overrightarrow{BC}=(0;1;0)$ nên chọn $\overrightarrow{n_{(SBC)}}=\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC}\right]=(-c;0;a-1)$.

$\overrightarrow{AB}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{AS}=(a;b;c)$ nên chọn $\overrightarrow{n_{(SAB)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right]=(0;-c;b)$.

Chọn $\overrightarrow{n_{(ABCD)}}=\vec{k}=(0;0;1)$.

Do $(SAD)\perp(SBC)\Rightarrow \overrightarrow{n_{(SAD)}}.\overrightarrow{n_{(SBC)}}=0\Leftrightarrow c^2+a(a-1)=0\Leftrightarrow c^2+a^2=a$ $(1)$.

Góc giữa $(SAB)$ và $(SBC)$ là $60^\circ$ $\Rightarrow \cos 60^\circ=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(SAB)}}.\overrightarrow{n_{(SBC)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(SAB)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(SBC)}}\right|}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{|b(a-1)|}{\sqrt{c^2+(a-1)^2}.\sqrt{c^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{b(1-a)}{\sqrt{1-a}.\sqrt{c^2+b^2}}$ do (*) và (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{b\sqrt{1-a}}{\sqrt{c^2+b^2}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{b}{\sqrt{c^2+b^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-a}}$ (2)

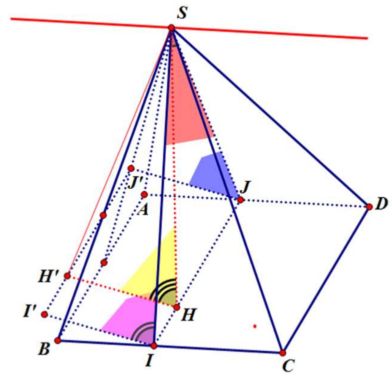
Góc giữa $(SAB)$ và $(SAD)$ là $45^\circ$ $\Rightarrow \cos 45^\circ=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(SAB)}}.\overrightarrow{n_{(SAD)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(SAB)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(SAD)}}\right|}\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|ab|}{\sqrt{c^2+a^2}.\sqrt{c^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{ab}{\sqrt{a}.\sqrt{c^2+b^2}}$ do (*)

$\dfrac{ab}{\sqrt{a}.\sqrt{c^2+b^2}}:\dfrac{b\sqrt{1-a}}{\sqrt{c^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}:\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{2}{3}$ $(3)$.

Góc giữa $(SAB)$ và $(ABCD)$ là $\alpha$ $\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(SAB)}}.\overrightarrow{n_{(ABCD)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(SAB)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(ABCD)}}\right|}=\dfrac{b}{\sqrt{c^2+b^2}}\overset{(2),(3)}{=}\dfrac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2:theo ý tưởng của thầy Vô Thường.




Gọi $I, J, H$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $S$ lên $BC, AD, (ABCD)$; $I', H', J'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $I, H, J$ lên $(SAB)$.

Ta có:

Do $(SAD) \perp (SBC)$ nên $((SAD),(SBC)) = \widehat{ISJ} = 90°$.

Suy ra $\begin{cases} SI \perp (SAD) \\ SJ \perp (SBC) \end{cases}$.

Do $\begin{cases} SI \perp (SAD) \\ II' \perp (SAB) \end{cases}$ nên $((SAD),(SAB)) = \widehat{SII'} = 45°$.

Do $\begin{cases} SJ \perp (SBC) \\ JJ' \perp (SAB) \end{cases}$ nên $((SBC),(SAB)) = \widehat{SJJ'} = 60°$.

Do $\begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ HH' \perp (SAB) \end{cases}$ nên $((SAB),(SABCD)) = \widehat{SHH'} = \alpha$.

Đặt $II' = HH' = JJ' = x$ với $x > 0$

$\Rightarrow SI = x\sqrt{2}, SJ = 2x, SH = \dfrac{SI.SJ}{IJ} = \dfrac{SI.SJ}{\sqrt{SI^2 + SJ^2}} = \dfrac{2\sqrt{2}x^2}{x\sqrt{6}} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{HH'}{SH} = \dfrac{x}{\dfrac{2x}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Câu 14.** **(Sở GD- ĐT Quảng Nam)** Gọi $X$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có $8$ chữ số được lập từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập tập hợp $X$. Gọi $A$ là biến cố lấy được số có đúng hai chữ số 1, có đúng hai chữ số 2, bốn chữ số còn lại đôi một khác nhau, đồng thời các chữ số giống nhau không đứng liền kề nhau. Xác suất của biến cố $A$ bằng

**A.** $\dfrac{201600}{9^8}$. **B.** $\dfrac{151200}{9^8}$. **C.** $\dfrac{5}{9}$. **D.** $\dfrac{176400}{9^8}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có không gian mẫu $n(\Omega) = 9^8$.

Lấy số có 8 chữ số mà có 2 số 1, 2 số 2, bốn số còn lại đôi một khác nhau thì có $C_7^4.\dfrac{8!}{2!.2!}$ cách.

Trường hợp 1: 2 số 1 đứng kề nhau coi là một số , 2 số 2 đứng kề nhau coi là một sô, vậy có tất cả $6!.C_7^4$ cách.

Trường hợp 2: 2 số một đứng cạnh nhau coi là một sô , 2 số 2 không đứng cạnh nhau và ngược lại có $C_7^4.2.\left(C_7^2 - 6\right).5!$

Vậy $n(A)=C_7^4.\dfrac{8!}{2!.2!}-6!.C_7^4-C_7^4.2.\left(C_7^2-6\right).5!=201600$ cách.

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{201600}{9^8}$

------------- HẾT -------------

**Câu 15.** Gieo đồng thời 3 con súc sắc. Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất 2 mặt 6 chấm. Xác suất để trong 6 lần chơi thắng ít nhất 4 lần gần nhất với giá trị nào dưới đây.

**A.** $1,65.10^{-7}$. **B.** $1,24.10^{-5}$ **C.** $3,87.10^{-4}$. **D.** $4.10^{-4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $B$ là biến cố gieo đồng thời 3 súc sắc. Gọi biến cố là $B_1,B_2,B_3$ lần lượt là các biến cố gieo súc sắc 1; 2; 3.

Xác suất để các súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm là $P(B_1)=\dfrac{1}{6};P(B_2)=\dfrac{1}{6};P(B_3)=\dfrac{1}{6}$..

Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất 2 mặt 6 chấm nên xác suất là

$P(B)=C_3^2.\dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{6}.\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{27}$.

Nên $P(B)=\dfrac{2}{27}$. Suy ra $P\left(\overline{B}\right)=1-\dfrac{2}{27}=\dfrac{25}{27}$

Gọi $A$ là biến cố "Bạn là người thắng cuộc". Để trong 6 lần chơi thắng ít nhất 4 lần nên ta có

$P(A)=C_6^4\left(P(B)\right)^4\left(P\left(\overline{B}\right)\right)^2+C_6^5\left(P(B)\right)^5P\left(\overline{B}\right)+C_6^6\left(P(B)\right)^6\approx 4.10^{-4}$

**Câu 16.** Số giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\cos 3x-\cos 2x+m\cos x-1=0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$.

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2 . **D.** 0 .

**Lời giải**

**Chọn C**

$\cos 3x-\cos 2x+m\cos x-1=0\Leftrightarrow \cos 3x-\left(1+\cos 2x\right)+m\cos x=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3x-3\cos x-2\cos^2x+m\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2x-2\cos x+m-3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\ (1)\\ 4\cos^2x-2\cos x+m-3=0\ (2)\end{array}\right.$

Giải (1) $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$. Do đó (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$ là $x=\dfrac{\pi}{2},x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Để phương trình đã cho có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$ thì phương trình (2) có 6 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$ và khác các nghiệm của (1) ở trên.

Đặt $\cos x=t,(-1\le t\le 1)$, phương trình (2) trở thành phương trình $4t^2-2t+m-3=0$ (3).

Với $t=1,t=-1$: mỗi nghiệm $t$ ta xác định được một nghiệm $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$.

Với $-1<t<0$: mỗi nghiệm $t$ ta xác định được 2 nghiệm $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$.

Với $0<t<1$: mỗi nghiệm $t$ ta xác định được 3 nghiệm $x\in\left(-\frac{\pi}{2};2\pi\right)$.

Do đó để phương trình (2) có 6 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};2\pi\right)$ và khác các nghiệm

$x=\frac{\pi}{2},x=\frac{3\pi}{2}$ thì phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $0<t<1$. Khi đó:

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ -\frac{b}{a}>0\\ ac>0\\ t_1,t_2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13-4m>0\\ \frac{2}{4}>0\\ 4(m-3)>0\\ \frac{2+\sqrt{13-4m}}{4}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{13}{4}\\ m>3\\ m>\frac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow 3<m<\frac{13}{4}.$$

Vậy không có giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn đk đề bài.

**Câu 17.** Gọi *A* là tập các số tự nhiên gồm *5* chữ số mà các chữ số đều khác *0*. Lấy ngẫu nhiên từ tập *A* một số. Tính xác suất để lấy được số mà chỉ có đúng *3* chữ số khác nhau.

**A.** $\frac{560}{6561}$. **B.** $\frac{1400}{6561}$. **C.** $\frac{2240}{6561}$. **D.** $\frac{1400}{19683}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $|\Omega|=9^5=59049$.

Gọi *B* là biến cố cần tìm xác suất.

Số cách chọn *3* chữ số phân biệt $a,b,c$ từ *9* chữ số khác *0* là $C_9^3$.

TH1. Có *1* chữ số trong *3* chữ số $a,b,c$ được lặp $3$ lần.

Chọn chữ số lặp: có *3* cách, giả sử là *a*.

Xếp *5* chữ số $a,a,a,b,c$ có $\frac{5!}{3!}$ cách, (vì cứ 3! hoán vị của các vị trí mà $a,a,a$ chiếm chỗ thì tạo ra cùng một số $n$).

Suy ra trong trường hợp này có $C_9^3.3\cdot\frac{5!}{3!}$ số tự nhiên.

TH2. Có *2* trong *3* chữ số $a,b,c$, mỗi chữ số được lặp $2$ lần.

Chọn *2* chữ số lặp: có $C_3^2$ cách, giả sử là *a*, *b*.

Xếp *5* chữ số $a,a,b,b,c$ có $\frac{5!}{2!2!}$ cách, (vì cứ 2! hoán vị của các vị trí mà $a,a$ chiếm chỗ và 2! hoán vị của các vị trí mà $b,b$ chiếm chỗ thì tạo ra cùng một số $n$).

Suy ra trong trường hợp này có $C_9^3.3\cdot\frac{5!}{2!2!}$ số tự nhiên.

Do đó ta có $|\Omega_B|=C_9^3.3\cdot\frac{5!}{3!}+C_9^3.3\cdot\frac{5!}{2!2!}=12600$ số.

Kết luận: $P(B)=\frac{|\Omega_B|}{|\Omega|}=\frac{12600}{59049}=\frac{1400}{6561}$.

**Cách 2: Lưu Thêm**

Gọi $A$ là tập các số tự nhiên gồm $5$ chữ số mà các chữ số đều khác $0$.

Xét phép thử: " Chọn ngẫu nhiên 1 số từ $A$" $\Rightarrow$ $n(\Omega)=9^5$.

Gọi $B$ là biến cố: " Số được chọn chỉ có đúng $3$ chữ số khác nhau".

TH1: Có 1 chữ số được lặp $3$ lần, $2$ chữ số còn lại khác nhau.

+) Chọn 1 chữ số khác $0$ có $9$ cách ( gọi là $a$).

+) Xếp 3 chữ số $a$ vào $3$ trong $5$ vị trí có $C_5^3$ cách.

+) Chọn $2$ chữ số từ $8$ chữ số còn lại và xếp vào $2$ vị trí còn lại có $A_8^2$ cách.

$\Rightarrow$ Có $9.C_5^3.A_8^2 = 5040$ (số).

TH2: Có $2$ trong $5$ chữ số, mỗi chữ số được lặp $2$ lần.

+) Chọn $2$ chữ số từ $9$ chữ số có $C_9^2$ (gọi là $a$, $b$).

+) Xếp $4$ chữ số: $a$, $a$, $b$, $b$ vào $4$ trong $5$ vị trí có $C_5^2.C_3^2$ cách.

+) Xếp 1 chữ số còn lại có $7$ cách.

$\Rightarrow$ Có $C_9^2.C_5^2.C_3^2.7 = 7560$ (số).

$\Rightarrow n(B) = 5040 + 7560 = 12600$.

Kết luận: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{12600}{9^5} = \dfrac{1400}{6561}$.

**Câu 18.** Chọn ngẫu nhiên một số nguyên thuộc $[1;500]$. Tính xác suất để chọn được một số là ước của 10800.

**A.** $\dfrac{18}{125}$. **B.** $\dfrac{16}{125}$. **C.** $\dfrac{49}{500}$. **D.** $\dfrac{23}{250}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $|\Omega| = 500$. Gọi $A$ là biến cố: "Chọn ngẫu nhiên một số nguyên thuộc $[1;500]$"

Vì $10800 = 2^4.3^3.5^2$ nên các ước của $10800$ có dạng $2^x.3^y.5^z$ với $x, y, z \in \mathbb{N}$ và $x \in [0;4]$, $y \in [0;3]$, $z \in [0;2]$. Để $2^x.3^y.5^z \le 500$ $(1)$ thì:

□ TH1: $z = 0$

$(1) \Leftrightarrow 2^x.3^y \le 500 \Leftrightarrow 3^y \le \dfrac{500}{2^x} \Leftrightarrow y \le \log_3\left(\dfrac{500}{2^x}\right)$

Lập bảng giá trị từ $x = 0$ tới $x = 4$, ta nhận $0 \le y \le 3$.

$\Rightarrow$ TH1 có $5.4 = 20$ cách.

□ TH2: $z = 1$

$(1) \Leftrightarrow 2^x.3^y \le 100 \Leftrightarrow 3^y \le \dfrac{100}{2^x} \Leftrightarrow y \le \log_3\left(\dfrac{100}{2^x}\right)$

Lập bảng giá trị từ $x = 0$ tới $x = 4$, ta có:

□ Với $x \in \{0;1\}$ thì $y \in \{0;1;2;3\}$.

□ Với $x \in \{2;3\}$ thì $y \in \{0;1;2\}$.

□ Với $x = 4$ thì $y \in \{0;1\}$.

$\Rightarrow$ TH2 có $2.4 + 2.3 + 1.2 = 16$ cách.

□ TH3: $z = 2$

$(1) \Leftrightarrow 2^x.3^y \le 20 \Leftrightarrow 3^y \le \dfrac{20}{2^x} \Leftrightarrow y \le \log_3\left(\dfrac{20}{2^x}\right)$

Lập bảng giá trị từ $x = 0$ tới $x = 4$, ta có:

□ Với $x \in \{0;1\}$ thì $y \in \{0;1;2\}$.

□ Với $x = 2$ thì $y \in \{0;1\}$.

□ Với $x \in \{3;4\}$ thì $y = 0$.

$\Rightarrow$ TH3 có $2.3 + 1.2 + 2.1 = 10$ cách.

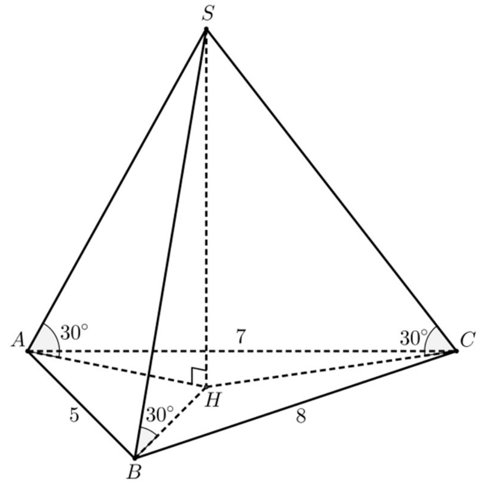
$\Rightarrow |\Omega_A| = 20 + 16 + 10 = 46$. Vậy $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{46}{500} = \dfrac{23}{250}$

**Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên $SA$, $SB$, $SC$ tạo với đáy các góc bằng nhau và đều bằng $30°$. Biết $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Khoảng cách $d$ từ điểm $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng

**A.** $d=\dfrac{35\sqrt{39}}{13}\cdot$ **B.** $d=\dfrac{35\sqrt{39}}{52}\cdot$ **C.** $d=\dfrac{35\sqrt{13}}{52}\cdot$ **D.** $d=\dfrac{35\sqrt{13}}{26}\cdot$

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $H$ là chân đường cao kẻ từ $S$ của tứ diện $S.ABC$.

Theo giả thiết, $\widehat{SAH}=\widehat{SBH}=\widehat{SCH}=30°$.

$\Rightarrow \Delta SAH=\Delta SBH=\Delta SCH$ (cạnh góc vuông – góc nhọn).

$\Rightarrow HA=HB=HC$.

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

Đặt $a=BC=8$, $b=AC=7$, $c=AB=5$, $p=\dfrac{a+b+c}{2}=10$, $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.

Áp dụng công thức Heron, ta được $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=10\sqrt{3}$.

$\Rightarrow R=HB=HC=\dfrac{a.b.c}{4S_{\Delta ABC}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\cdot$

$\Delta SHB$ vuông tại $H\Rightarrow SH=HB.\tan 30°=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$, $SB=\dfrac{HB}{\cos 30°}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{14}{3}=SC$.

Ta có: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{3}\cdot 10\sqrt{3}=\dfrac{70\sqrt{3}}{9}\cdot$

Cũng áp dụng công thức Heron cho $\Delta SBC$ có $SB=SC=\dfrac{14}{3}$, $BC=8$, ta được: $S_{\Delta SBC}=\dfrac{8\sqrt{13}}{3}\cdot$

$$\Rightarrow d=d\left(A,(SBC)\right)=\frac{3.V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{3\cdot\frac{70\sqrt{3}}{9}}{\frac{8\sqrt{13}}{3}}=\frac{35\sqrt{39}}{52}\cdot$$

**Câu 20.** **(THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19)** Gọi $X$ là tập hợp các số tự nhiên có $5$ chữ số. Lấy ngẫu nhiên hai số từ tập $X$. Xác suất để nhận được ít nhất một số chia hết cho $4$ gần nhất với số nào dưới đây?

**A.** $0,44$. **B.** $0,56$. **C.** $0,12$. **D.** $0,23$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Các số tự nhiên của tập $X$ có dạng $\overline{abcde}$, suy ra tập $X$ có $9.10^4$ số. Lấy từ tập $X$ ngẫu nhiên hai số có $C_{90000}^2$ số.

Vì $\overline{abcde}\vdots 4\Rightarrow \overline{de}\vdots 4\Rightarrow \overline{de}\in\{00,04,08,12,...,92,96\}$ có $25$ số.

Suy ra số tự nhiên có năm chữ số chia hết cho $4$ là $9.10.10.25 = 22500$ số.

Số tự nhiên có năm chữ số không chia hết cho $4$ là $9.10.10.75 = 67500$ số.

Vậy xác suất để ít nhất một số chia hết cho $4$ là: $P = \dfrac{C_{22500}^2 + C_{22500}^1 C_{67500}^1}{C_{90000}^2} \approx 0,437$.

**Câu 21.** Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r \quad (m \neq 0)$. Chia $f(x)$ cho $x-2$ được phần dư bằng $2019$, chia $f'(x)$ cho $x-2$ được phần dư bằng 2018. Gọi $g(x)$ là phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x-2)^2$. Giá trị của $g(-1)$ là

**A.** $-4033$. **B.** $-4035$. **C.** $-4039$. **D.** $-4037$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $h(x)$ là thương và $g(x)$ là phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x-2)^2$ tức là $f(x) = h(x)(x-2)^2 + g(x)$. Do $f(x)$ là hàm số bậc $4$ nên $h(x)$ là một hàm số bậc $2$ và $g(x)$ là hàm số có bậc nhỏ hơn $2$. Suy ra hàm số $g(x)$ có dạng $g(x) = ax + b$.

Ta có $f'(x) = h'(x).(x-2)^2 + 2h(x).(x-2) + a$.

Theo giả thiết khi chia $f(x)$ cho $x-2$ được phần dư bằng $2019$, chia $f'(x)$ cho $x-2$ được phần dư bằng 2018 nên ta có $\begin{cases} f(2) = 2019 \\ f'(2) = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2019 \\ a = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2018 \\ b = -2017 \end{cases}$.

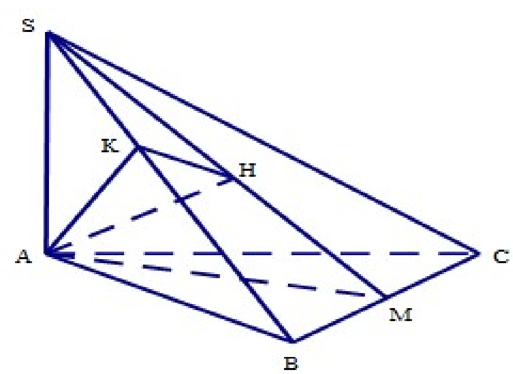
Suy ra $g(x) = 2018x - 2017$. Vậy $g(-1) = 2018.(-1) - 2017 = -4035$.

**Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$ . Cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SBC)$ là

**A.** $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Do tam giác $ABC$ đều nên $AM \perp BC$ và $AM = AB \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi $H$ , $K$ lần lượt là hình chiếu của $A$ trên $SM, SB$.

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AM$ . Trong các tam giác vuông $SAB$ , $SAM$ , ta có:

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ; $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

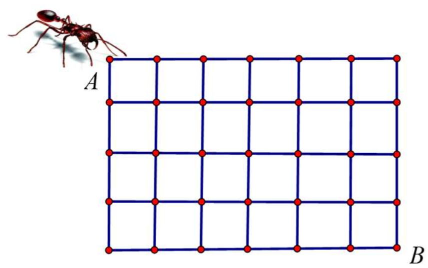
$\begin{cases} BC \perp SA\left(do\ SA \perp (ABC)\right) \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \begin{cases} AH \perp KH \\ AH \perp SB \end{cases}. \begin{cases} SB \perp AH \\ SB \perp AK \end{cases} \Rightarrow SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$ .

Từ $AH \perp KH \Rightarrow KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$

Từ $\begin{cases} SB \perp AK \\ SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow \left((SAB),(SBC)\right) = \widehat{AKH} \Rightarrow \cos\left((SAB),(SBC)\right) = \dfrac{HK}{AK} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

**Câu 23.** **(THPT Chuyên Lam Sơn - lần 2- NĂM HỌC 2018 – 2019)** Cho lưới ô vuông đơn vị, kích thước $4 \times 6$ như sơ đồ hình vẽ dưới. Một con kiến bò từ A mỗi lần di chuyển nó bò theo một cạnh hình vuông để tới mắt lưới liền kề. Có bao nhiêu cách thực hiện hành trình để sau 12 lần di chuyển nó dừng lại ở B?




**A.** $3489$. **B.** $3498$. **C.** $6666$. **D.** $1532$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì con kiến sau 12 lần di chuyển dừng lại ở B nên hành trình của con kiến chỉ có thể gồm: 7 lần bò sang phải 1 lần bò sang trái 4 lần bò xuống hoặc 6 lần bò sang phải 5 lần bò xuống 1 lần bò lên.

Ta ký hiệu:" L: bò lên; X: bò xuống; P: bò sang phải; T: bò sang trái".

**TH1**: Hành trình con kiến bao gồm: 7 lần bò sang phải 1 lần bò sang trái 4 lần bò xuống. Số hành trình trường hợp này là số cách xếp 7 chữ P; 1 chữ T; 4 chữ X vào 12 ô theo thứ tự và chữ T phải nằm trong các chữ P. Ta xếp 4 chữ X trước có $C_{12}^4$ cách. Vì chữ T phải nằm trong các chữ P có 6 cách xếp $\Rightarrow$ Số hành trình loại này là: $6.C_{12}^4$

**TH2**: Hành trình con kiến bao gồm: 6 lần bò sang phải 5 lần bò xuống 1 lần bò lên. Tương tự như trường hợp 1 $\Rightarrow$ Số hành trình loại này $4.C_{12}^6$.

Vậy số cách thực hiện hành trình để sau 12 lần di chuyển con kiến dừng lại ở B là:

$6.C_{12}^4 + 4.C_{12}^4 = 6666$.

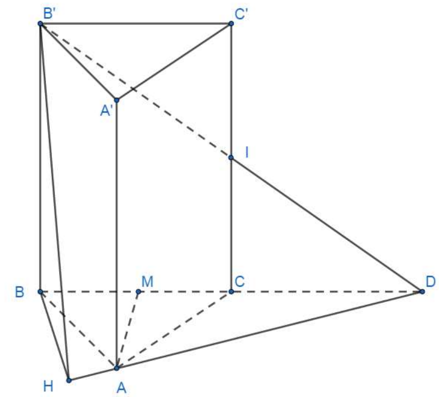
**Câu 24.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác cân với, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = a$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(AB'I)$, với $I$ là trung điểm $CC'$?

**A.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1**




Gọi $D$ là giao điểm giữa $B'I$ và $BC$

$M$ là trung điểm $BC$, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = AC.\sin 30^\circ = \frac{a}{2}$

Ta có $I$ là trung điểm $CC'$ và $IC = \frac{1}{2}BB'$ nên $C$ là trung điểm $BD$

Áp dụng định lý côsin cho tam giác $ABC$

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2ABAC.\cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$, $BD = 2\sqrt{3}$

$ABC$ là tam giác cân $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên $\widehat{ACD} = 150^\circ$

Áp dụng định lý côsin cho tam giác $ACD$

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2ACCD.\cos 150^\circ} = a\sqrt{7}$

Do $(ABC) \cap (AB'I) = AD$. Kẻ $BH \perp AD$

Suy ra $\left(\widehat{(ABC),(AB'I)}\right) = \widehat{B'HB}$. Lại có: $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AM.BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \frac{2S_{\Delta ABD}}{AD} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Xét tam giác $B'BH$ vuông tại $B$; $B'H = \sqrt{BH^2 + BB'^2} = \frac{a\sqrt{70}}{7}$

Khi đó $\cos\widehat{B'HB} = \frac{BH}{B'H} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.\frac{7}{a\sqrt{70}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$

**Cách 2:**

Tam giác $ABC$ là hình chiếu của tam giác $AB'I$

Gọi $\varphi$ là góc giữa $(ABC)$ và $(AB'I) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}}$; $S_{\Delta ABC}\frac{1}{2}AB.AC.\text{Sin}120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Xét $\Delta AB'I$ có $AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2ABAC.\cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$

$B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$; $AB' = a\sqrt{2}$

Ta có $AI^2 + AB'^2 = B'I^2$ nên $\Delta AB'I$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{\Delta AB'I} = \frac{1}{2}AI.AB' = \frac{a^2\sqrt{10}}{4} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{4}{a^2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$

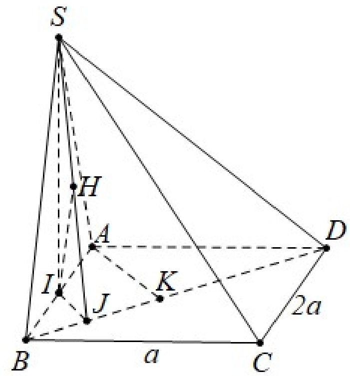
Bình luận: Bài này có thể sử dụng tọa độ để giải!

**Câu 25.** **(Thi Thử Cẩm Bình Cẩm Xuyên Hà Tĩnh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBD)$.

**A.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a$. **D.** $\frac{a}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $I$ là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB$.

Ta có: $\begin{cases} SI \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD)(gt) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Xét $\Delta SAB$ đều có cạnh bằng $2a \Rightarrow SI = a\sqrt{3}$

Kẻ $AK \perp BD$ tại $K$. Ta xét $\Delta BAD$ có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Kẻ $JI \perp BD$ tại $J \Rightarrow JI // AK \Rightarrow JI = \frac{1}{2}AK = \frac{\sqrt{5}a}{5}$. Ta có: $BD \perp SI \Rightarrow BD \perp (SJI)$.

Kẻ $HI \perp SJ$ tại $H \Rightarrow IH \perp (SBD)$ tại $H \Rightarrow d(I;(SBD)) = IH$.

Xét $\Delta SJI$ có: $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{JI^2} + \frac{1}{SI^2} = \frac{5}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do $I$ là trung điểm của $AB$ nên:

$$\frac{d(A;(SBD))}{d(I;(SBD))} = \frac{AB}{AI} = 2 \Rightarrow d(A;(SBD)) = 2d(I;(SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

**Câu 26.** Có bao nhiêu cách phân tích số $15^9$ thành tích của ba số nguyên dương, biết rằng các cách phân tích mà các phần tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính một lần?

**A.** $517$. **B.** $516$. **C.** $493$. **D.** $492$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $15^9 = 3^9.5^9$. Đặt $x = 3^{a_1}.5^{b_1}$, $y = 3^{a_2}.5^{b_2}$, $z = 3^{a_3}.5^{b_3}$.

Xét $3$ trường hợp:

Trường hợp 1:3 số $x, y, z$ bằng nhau $\rightarrow$ có $1$ cách chọn.

Trường hợp $2$:Trong $3$ số có $2$ số bằng nhau, giả sử: $x = y \Rightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + a_3 = 9 \\ 2b_1 + b_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 9 - 2a_1 \\ b_3 = 9 - 2a_3 \end{cases}.$$

Suy ra có $5$ cách chọn $a_1$ và $5$ cách chọn $b_1$.

Trường hợp 3: Số cách chọn $3$ số phân biệt.

Số cách chọn $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 9 \end{cases}$ là $C_{11}^2.C_{11}^2$.

Suy ra số cách chọn 3 số phân biệt là $C_{11}^2.C_{11}^2 - 24.3 - 1$.

Vậy số cách phân tích số $15^9$ thành ba số nguyên dương là $\dfrac{C_{11}^2.C_{11}^2 - 24.3 - 1}{3!} + 25 = 517$.

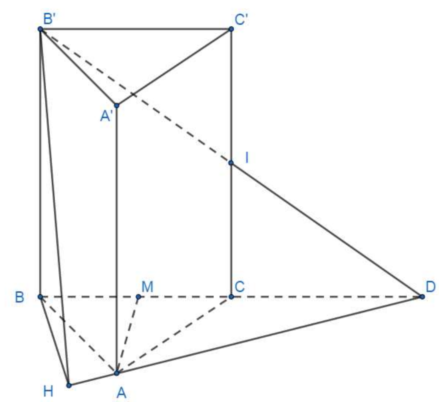
**Câu 27.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác cân với, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = a$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(AB'I)$, với $I$ là trung điểm $CC'$?

**A.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1**




Gọi $D$ là giao điểm giữa $B'I$ và $BC$

$M$ là trung điểm $BC$, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = AC.\sin 30^\circ = \dfrac{a}{2}$

Ta có $I$ là trung điểm $CC'$ và $IC = \dfrac{1}{2}BB'$ nên $C$ là trung điểm $BD$

Áp dụng định lý côsin cho tam giác $ABC$

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2ABAC.\cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$, $BD = 2\sqrt{3}$

$ABC$ là tam giác cân $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên $\widehat{ACD} = 150^\circ$

Áp dụng định lý côsin cho tam giác $ACD$

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2ACCD.\cos 150^\circ} = a\sqrt{7}$

Do $(ABC) \cap (AB'I) = AD$. Kẻ $BH \perp AD$

Suy ra $\left(\widehat{(ABC),(AB'I)}\right) = \widehat{B'HB}$. Lại có: $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}AM.BD = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow BH = \dfrac{2S_{\Delta ABD}}{AD} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Xét tam giác $B'BH$ vuông tại $B$; $B'H = \sqrt{BH^2 + BB'^2} = \dfrac{a\sqrt{70}}{7}$

Khi đó $\cos\widehat{B'HB} = \dfrac{BH}{B'H} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}.\dfrac{7}{a\sqrt{70}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$

**Cách 2:**

Tam giác $ABC$ là hình chiếu của tam giác $AB'I$

Gọi $\varphi$ là góc giữa $(ABC)$ và $(AB'I) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}}$; $S_{\Delta ABC} \frac{1}{2} AB.AC.\mathrm{Sin}120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Xét $\Delta AB'I$ có $AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2ABAC.\cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$

$B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$; $AB' = a\sqrt{2}$

Ta có $AI^2 + AB'^2 = B'I^2$ nên $\Delta AB'I$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{\Delta AB'I} = \frac{1}{2} AI.AB' = \frac{a^2\sqrt{10}}{4} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$

Bình luận: Bài này có thể sử dụng tọa độ để giải!

**Câu 28.** Cho tập hợp $S = \{1;2;3;4;5;6\}$. Gọi $M$ là tập hợp các số tự nhiên có $6$ chữ số đôi một khác nhau lấy từ $S$ sao cho tổng chữ số các hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm lớn hơn tổng chữ số các hàng còn lại là $3$. Tính tổng $T$ của các phần tử của tập hợp $M$.

**A.** $T = 36011952$. **B.** $T = 12003984$. **C.** $T = 18005967$. **D.** $T = 11003984$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tổng của $6$ chữ số là $21$. Tổng chữ số các hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm lớn hơn tổng chữ số các hàng còn lại là 3 nên tổng các chữ số 3 hàng còn lại là $9$. Do đó, có $3$ trường hợp về nhóm các chữ số ở hàng nghìn, chục nghìn, trăm nghìn là: $(1;2;6),(1;3;5),(2;3;4)$ TH1. Các chữ số ở hàng nghìn, chục nghìn, trăm nghìn gồm $1;2;6$

Trong trường hợp này, số lần chữ số 1 xuất hiện ở hàng trăm nghìn chính là số số tự nhiên có dạng $\overline{1abcde}$, trong đó $a,b,c,d,e$ đôi một khác nhau, $a,b \in \{2;6\}, c,d,e \in \{3;4;5\}$, theo quy tắc nhân ta có $2.1.3.2.1 = 12$ số như vậy

TH2. Các chữ số ở hàng nghìn, chục nghìn, trăm nghìn gồm $1;3;5$

Tương tự, trường hợp này cũng có $12$ số

TH3. Các chữ số ở hàng nghìn, chục nghìn, trăm nghìn gồm $2;3;4$

Trường hợp này không có số nào dạng trên

Như vậy, có $24$ số tự nhiên có dạng $\overline{1abcde}$, tức là có $24$ lần chữ số $1$ xuất hiện ở hàng trăm nghìn.

Do vai trò như nhau nên các chữ số $2$ và cũng xuất hiện mỗi chữ số $24$ lần, còn các chữ số $4,5,6$ cũng xuất hiện mỗi chữ số $12$ lần ở hàng trăm nghìn.

Tổng tất cả các chữ số ở hàng trăm nghìn là $1.24 + 2.24 + 3.24 + 4.12 + 5.12 + 6.12 = 324$

Tương tự, ta cũng có tổng các chữ số ở các hàng chục nghìn, hàng nghìn là $324$.

Ở nhóm hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm tương ứng có $3$ trường hợp với $3$ bộ số là $(3;4;5)$, $(2;4;6),(1;5;6)$, trong đó, mỗi chữ số $1,2,3$ xuất hiện ở hàng mỗi hàng là $12$, mỗi chữ số $4,5,6$ xuất hiện ở mỗi hàng là 24. Do đó, tổng tất cả các chữ số trong mỗi hàng này là $1.12 + 2.12 + 3.12 + 4.24 + 5.24 + 6.24 = 432$

Do vậy, tổng tất cả các số lập được là

$324.10^5 + 324.10^4 + 324.10^3 + 432.10^2 + 432.10 + 432 = 36011952$

**Câu 29.** Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

**A.** $m \le 2^{2019}$. **B.** $m < 2^{2019}$. **C.** $m < 2^{2018}$. **D.** $m \le 2^{2018}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$, TXĐ: $R$.

Ta có $f'(x) = -2\sin 2x$, $f''(x) = -2^2\cos 2x$, $f'''(x) = 2^3\sin 2x$, $f^{(4)}(x) = 2^4\cos 2x$.

Suy ra $f^{(2016)}(x) = 2^{2016}\cos 2x \Rightarrow f^{(2017)}(x) = -2^{2017}\sin 2x$

$\Rightarrow f^{(2018)}(x) = -2^{2018}\cos 2x$

$\Rightarrow f^{(2019)}(x) = 2^{2019}\sin 2x$.

Vì $x \in \left(\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{8}\right)$ nên $\dfrac{1}{2} < \sin 2x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay $f^{(2019)}(x) > 2^{2018}$, $\forall x \in \left(\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Vậy $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi $m \le 2^{2018}$.

**Câu 30.** Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có $5$ chữ số mà các chữ số đều khác $0$, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra chỉ có mặt đúng ba chữ số khác nhau.

**A.** $P = \dfrac{1130}{6561}$. **B.** $P = \dfrac{1400}{6561}$. **C.** $P = \dfrac{1500}{6561}$. **D.** $P = \dfrac{1120}{6561}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Số các chữ số tự nhiên có $5$ chữ số mà các chữ số đều khác $0$ là: $n(\Omega) = 9^5$ số.

Gọi $A$ là biến cố: " Lấy một số tự nhiên có $5$ chữ số mà chỉ có mặt đúng ba chữ số khác nhau".
Khi đó có các trường hợp sau xảy ra:

+ Trường hợp $1$: Số đó có $1$ chữ số xuất hiện $3$ lần và hai chữ số còn lại xuất hiện $1$ lần.

Chọn 3 chữ số trong $9$ chữ số có $C_9^3$ cách chọn.

Chọn số xuất hiện $3$ lần có $3$ cách chọn.

Sắp xếp thứ tự các số này, sắp thứ tự $2$ số khác nhau trước, còn lại là vị trí của số xuất hiện $3$ lần: $A_5^2.1$ cách.

Vậy theo quy tắc nhân có: $C_9^3.3.A_5^2 = 5040$ cách.

+ Trường hợp $2$: Số đó có $2$ chữ số xuất hiện $2$ lần và chữ số còn lại xuất hiện $1$ lần.

Chọn 3 chữ số trong $9$ chữ số có $C_9^3$ cách chọn.

Chọn số xuất hiện $1$ lần có $3$ cách chọn.

Sắp xếp thứ tự các số này, sắp thứ tự cho số xuất hiện $1$ lần trước, sau đó chọn vị trí cho số xuất hiện $2$ lần: $5.C_4^2.1$ cách

Vậy theo quy tắc nhân có: $C_9^3.3.5.C_4^2.1 = 7560$ cách.

Vậy $n(A) = 5040 + 7560 = 12600$.

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1400}{6561}$.

**Câu 31.** Cho hàm số $y = x^3 - 2019x$ có đồ thị là $(C)$. Gọi $M_1$ là điểm trên $(C)$ có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M_1$ cắt $(C)$ tại điểm $M_2$ khác $M_1$, tiếp tuyến của $(C)$ tại $M_2$ cắt $(C)$ tại điểm $M_3$ khác $M_2$, tiếp tuyến của $(C)$ tại $M_{n-1}$ cắt $(C)$ tại điểm $M_n$ khác $M_{n-1}$ với $(n = 4, 5, ...)$. Gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm $M_n$. Tìm $n$ sao cho $2019x_n + y_n + 2^{2019} = 0$.

**A.** $n = 685$. **B.** $n = 673$. **C.** $n = 674$. **D.** $n = 675$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $M_n(x_n; y_n)$, với $y_n = x_n^3 - 2019x_n$, $\forall n \ge 1$.

Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M_{n-1}$ với $n \ge 2$ là $(d_{n-1}): y = k_{n-1}(x - x_{n-1}) + y_{n-1}$, trong đó $k_{n-1} = 3x_{n-1}^2 - 2019$.

Mà $M_n \in (d_{n-1})$ với $n \ge 2$ nên ta có $y_n = k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + y_{n-1}$

$\Leftrightarrow y_n - y_{n-1} = (3x_{n-1}^2 - 2019)(x_n - x_{n-1})$

$\Leftrightarrow x_n^3 - 2019x_n - x_{n-1}^3 + 2019x_{n-1} = (3x_{n-1}^2 - 2019)(x_n - x_{n-1})$

$\Leftrightarrow (x_n - x_{n-1})(x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 - 2019) = (3x_{n-1}^2 - 2019)(x_n - x_{n-1})$

$\Leftrightarrow (x_n - x_{n-1})(x_n^2 + x_n x_{n-1} - 2x_{n-1}^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x_n - x_{n-1})^2 (x_n + 2x_{n-1}) = 0$

$\Leftrightarrow x_n - x_{n-1} = 0$ (loại vì $M_n \ne M_{n-1}$) hoặc $x_n + 2x_{n-1} = 0$ (nhận)

$\Leftrightarrow x_n = -2x_{n-1}$ với $n \ge 2$.

Suy ra $x_n = (-2)^{n-1} x_1 = (-2)^{n-1}$ với $n \ge 1$ (vì $x_1 = 1$).

Hơn nữa:

$2019x_n + y_n + 2^{2019} = 0$

$\Leftrightarrow 2019x_n + x_n^3 - 2019x_n + 2^{2019} = 0$

$\Leftrightarrow (-2)^{3(n-1)} = (-2)^{2019}$

$\Leftrightarrow 3n = 2022$

$\Leftrightarrow n = 674.$

**------------- HẾT -------------**