

**Bài 1 :** Giải bất phương trình  $(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 4x\sqrt{x^2 + 1} \geq 2(x + 1)$

**Lời giải tham khảo :**

$$\begin{aligned} &(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 4x\sqrt{x^2 + 1} \geq 2(x + 1) \\ \Leftrightarrow &(x + 1)(2 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + 2x(2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}) \leq 0 \\ \Leftrightarrow &(x + 1)(2 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + \frac{2x(4x^2 + 4 - x^2 + 2x - 5)}{2\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}} \leq 0 \\ \Leftrightarrow &(x + 1)(2 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + \frac{2x(x + 1)(3x - 1)}{2\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}} \leq 0 \\ \Leftrightarrow &(x + 1) \left[ (2 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + \frac{2x(3x - 1)}{2\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}} \right] \leq 0 \\ \Leftrightarrow &(x + 1) \left[ \frac{4\sqrt{x^2 + 1} + 2\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5)} + (7x^2 - 4x + 5)}{2\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}} \right] \leq 0 \end{aligned}$$

Có  $7x^2 - 4x + 5 = 7\left(x^2 - \frac{4}{7}x + \frac{4}{49}\right) + \frac{31}{7} \geq \frac{31}{7}$  nên biểu thức trong ngoặc luôn  $> 0$ .

Do đó bất phương trình  $\Leftrightarrow x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = (-\infty; -1]$

**Bài 2 :** Giải bất phương trình  $\sqrt{x + 2} + x^2 - x + 2 \leq \sqrt{3x - 2}$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $x \geq \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \text{bpt} \Leftrightarrow &\sqrt{x + 2} - \sqrt{3x - 2} + x^2 - x - 2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{-2(x - 2)}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{3x - 2}} + (x - 2)(x + 1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow &(x - 2) \left[ \frac{-2}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{3x - 2}} + x + 1 \right] \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}} + x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{3}{\sqrt{3x-2}} + 1 > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{2}{3}\right) > 0$$

Do đó bất phương trình  $\Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left[\frac{2}{3}; 2\right]$

**Bài 3 :** Giải bất phương trình  $4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} \leq (x-1)(x^2-2)$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $x \geq -1$

Nhận thấy  $x = -1$  là một nghiệm của bất phương trình

Xét  $x > -1$  ta có bất phương trình tương đương với

$$4(\sqrt{x+1}-2) + 2(\sqrt{2x+3}-3) \leq x^3 - x^2 - 2x - 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4(x-3)}{\sqrt{2x+3}+3} \leq (x-3)(x^2+2x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left( \frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+3} - (x+1)^2 - 3 \right) \leq 0$$

Vì  $x > -1$  nên  $\sqrt{x+1} > 0$  và  $\sqrt{2x+3} > 1 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+3} < 3$

Do đó  $\frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+3} - (x+1)^2 - 3 < 0$

Suy ra bất phương trình  $\Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \{1\} \cup [3; +\infty)$

**Bài 4 :** Giải bất phương trình  $\frac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3 - \sqrt{x}}} \geq 1$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $x \geq 0$ . Khi  $x \geq 0$  ta có  $\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x} > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3 - \sqrt{x}}} \geq 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x(x+2)} \geq \sqrt{(x+1)^3 - \sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x \geq x^3 + 3x^2 + 4x + 1 - 2(x+1)\sqrt{x(x+1)} \\ &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2(x+1)\sqrt{x^2+x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2+x+1-2\sqrt{x^2+x}) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2+x+1-2\sqrt{x^2+x} \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x}-1)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

**Bài 5 :** Giải bất phương trình  $\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{-x-1}} - \frac{2}{3}x \geq 1$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $-2 < x < -1$  (\*)

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow 3 \left( \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{-x-1}} \right) \geq (\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{-x-1})^2 \\ &\Leftrightarrow 3 \geq \sqrt{x+2}\sqrt{-x-1}(\sqrt{x+2} - \sqrt{-x-1}) \end{aligned}$$

Đặt  $a = \sqrt{x+2} - \sqrt{-x-1} \Rightarrow \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{-x-1} = \frac{1-a^2}{2}$

Ta được bất phương trình  $\frac{a-a^3}{2} \leq 3 \Leftrightarrow a^3 - a + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (a+2)(a^2 - 2a + 3) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{-x-1} \geq -2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + 2 \geq \sqrt{-x-1} \Leftrightarrow x + 6 + 4\sqrt{x+2} \geq -x - 1 \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{x+2} \geq -(2x+7) \quad (1) \end{aligned}$$

(1) luôn đúng với điều kiện (\*). Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = (-2; -1)$

**Bài 6 :** Giải bất phương trình  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}} > x - \frac{1}{2}$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $x \in [-1; 3] \setminus \{1\}$

$$\text{bpt} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x})}{2(x-1)} > x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1 + \sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)} > x - \frac{1}{2} \quad (*)$$

Trường hợp 1 :  $1 < x \leq 3$  (1)

$$(*) \Leftrightarrow x+1 + \sqrt{-x^2+2x+3} > 2x^2 - 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(-x^2+2x+3) + \sqrt{-x^2+2x+3} - 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left( \frac{2-\sqrt{7}}{2}; \frac{2+\sqrt{7}}{2} \right)$$

Kết hợp với (1) ta được  $x \in \left( 1; \frac{2+\sqrt{7}}{2} \right)$

Trường hợp 2 :  $-1 < x < 1$  (2)

$$(*) \Leftrightarrow x+1 + \sqrt{-x^2+2x+3} < 2x^2 - 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(-x^2+2x+3) + \sqrt{-x^2+2x+3} - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{-x^2+2x+3} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left[ -1; \frac{2-\sqrt{7}}{2} \right) \cup \left( \frac{2+\sqrt{7}}{2}; 3 \right]$$

Kết hợp với (2) ta được  $x \in \left[ -1; \frac{2-\sqrt{7}}{2} \right)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left[ -1; \frac{2-\sqrt{7}}{2} \right) \cup \left( 1; \frac{2+\sqrt{7}}{2} \right)$

**Bài 7 :** Giải bất phương trình  $\frac{6x^2 - 2(3x+1)\sqrt{x^2-1} + 3x-6}{x+1 - \sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} - \sqrt{2(x^2+2)}} \leq 0$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $1 \leq x \leq 2$

Ta có

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + x^2 + 1 + 1 \leq 2x^2 + 2 < 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow x+1 < \sqrt{2(x^2+2)} \Rightarrow x+1 - \sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} - \sqrt{2(x^2+2)} < 0 \quad \forall x \in [1; 2]$$

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow 6x^2 - 2(3x + 1)\sqrt{x^2 - 1} + 3x - 6 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4(x^2 - 1) - 2(3x + 1)\sqrt{x^2 - 1} + 2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - 1} - x + \frac{1}{2}\right) \left(\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{2} - 1\right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét  $1 \leq x \leq 2$  ta có  $\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{2} - 1 \leq \sqrt{3} - 2 < 0$

Do đó bất phương trình  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} - x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{4}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left[1; \frac{5}{4}\right]$

**Bài 8 :** Giải bất phương trình  $2\sqrt{x^3} + \frac{5 - 4x}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x + \frac{10}{x}} - 2$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $x > 0$

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 5 \geq \sqrt{x^2 - 2x + 10} \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 10) - \sqrt{x^2 - 2x + 10} - 15 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 10} \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 10 \geq 9 \end{aligned}$$

bất phương trình cuối luôn đúng. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = (0; +\infty)$

**Bài 9 :** Giải bất phương trình  $3(2x^2 - x\sqrt{x^2 + 3}) < 2(1 - x^4)$

**Lời giải tham khảo :**

$$bpt \Leftrightarrow 2(x^4 + 3x^2) - 3x\sqrt{x^2(x^2 + 3)} - 2 < 0$$

$$\text{Đặt } x\sqrt{x^2 + 3} = t \Rightarrow x^4 + 3x^2 = t^2$$

$$\text{Khi đó } bpt \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < t < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x\sqrt{x^2 + 3} < 2$$

\* Với  $x \geq 0$  ta có

$$bpt \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{x^2 + 3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 + 3x^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$$

\* Với  $x < 0$  ta có

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -\frac{1}{2} < x\sqrt{x^2+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{2} > -x\sqrt{x^2+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 3x^2 - \frac{1}{4} < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < \frac{-3 + \sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{10}}{2}} < x < 0 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left(-\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{10}}{2}}; 1\right)$

**Bài 10 :** Giải bất phương trình  $\frac{\sqrt{x+24} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}} < \frac{27(12+x - \sqrt{x^2+24x})}{8(12+x + \sqrt{x^2+24})}$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $x > 0$

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}} < \frac{27(24+x - 2\sqrt{x^2+24x} + x)}{8(24+x + 2\sqrt{x^2+24} + x)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}} < \frac{27(\sqrt{x^2+24x} - \sqrt{x})^2}{8(\sqrt{x^2+24} + \sqrt{x})^2} \\ &\Leftrightarrow 8(\sqrt{x+24} + \sqrt{x})^3 < 27(\sqrt{x+24} - \sqrt{x})^3 \\ &\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+24} + \sqrt{x}) < 3(\sqrt{x+24} - \sqrt{x}) \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{x} < \sqrt{x+24} \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = [0; 1)$

**Bài 11 :** Giải bất phương trình  $4(x+1)^2 < (2x+10)(1 - \sqrt{3+2x})^2$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $x > -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow 4(x+1)^2 < \frac{(2x+10)(1 - \sqrt{3+2x})^2(1 + \sqrt{3+2x})^2}{(1 + \sqrt{3+2x})^2} \\ &\Leftrightarrow 4(x+1)^2 < \frac{(2x+10)4(x+1)^2}{(1 + \sqrt{3+2x})^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 1 < \frac{2x+10}{(1 + \sqrt{3+2x})^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (1 + \sqrt{3+2x})^2 < 2x+10 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \sqrt{3+2x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = (-\infty; 3) \setminus \{-1\}$

**Bài 12 :** Giải bất phương trình  $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} \leq 6$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $x \leq 12$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{x+24} = u \Leftrightarrow x+24 = u^3$$

$$\sqrt{12-x} = v \geq 0 \Leftrightarrow v^2 = 12-x$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} u^3 + v^2 = 36 & (1) \\ u + v \leq 6 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow u^3 = 36 - v^2 \Leftrightarrow u = \sqrt[3]{36 - v^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{36 - v^2} + v \leq 6 \Leftrightarrow 36 - v^2 \leq (6 - v)^3$$

$$\Leftrightarrow (6 - v)(6 + v) - (6 - v)^3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (6 - v)(6 + v - 36 + 12v - v^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (6 - v)(3 - v)(v - 10) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (v - 6)(v - 3)(v - 10) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow v \in [0; 3] \cup [6; 10]$$

$$\Rightarrow x \in [-88; -24] \cup [3; +\infty)$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là  $T = [-88; -24] \cup [3; 13]$

**Bài 13 :** Giải bất phương trình  $x + \sqrt{x-1} \geq 3 + \sqrt{2x^2 - 10x + 16}$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $x \geq 1$

$$\text{bpt} \Leftrightarrow (x-3) + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-3)^2 + (x-1)}$$

$$\text{Xét các vecto } \vec{a} = (x-3; \sqrt{x-1}), \vec{b} = (1; 1)$$

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = (x-3) + \sqrt{x-1}, |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-3)^2 + (x-1)}$$

Khi đó  $bpt \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \geq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow$  hai vecto cùng hướng

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{\sqrt{x-1}}{1} > 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Kết hợp điều kiện bất phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 5$

**Bài 14 :** Giải bất phương trình  $(3-x)\sqrt{x-1} + \sqrt{5-2x} \geq \sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$

**Lời giải tham khảo :**

Điều kiện :  $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$

Xét hai vecto  $\vec{a} = (3-x; 1), \vec{b} = (\sqrt{x-1}; \sqrt{5-2x})$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3-x)\sqrt{x-1} + \sqrt{5-2x}, |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$$

Khi đó  $bpt \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \geq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow$  hai vecto cùng hướng

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{5-2x}} \Leftrightarrow x = 2$$

Kết hợp với điều kiện ta có bất phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$

**Bài 15 :** Giải bất phương trình  $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{35}{12}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $|x| > 1$

Nếu  $x < -1$  thì  $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0$  nên bất phương trình vô nghiệm

$$\text{Do đó } bpt \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + \frac{x^2}{x^2-1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1225}{144} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x^4}{x^2-1} + 2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1225}{144} > 0 \end{cases}$$

Đặt  $t = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > 0$

Khi đó ta có  $bpt \ t^2 + 2t - \frac{1225}{144} > 0 \Rightarrow t > \frac{25}{12}$

Ta được  $\begin{cases} x > 1 \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{25}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x^4}{x^2-1} > \frac{625}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$



Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $\left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$

**Bài 16 :** Giải bất phương trình  $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} \leq \sqrt{4x^2 - 18x + 18}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty) \cup \{3\}$

Dễ thấy  $x = 3$  là một nghiệm của bất phương trình

Với  $x \geq 5$  ta được

$$bpt \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)(x-3)} + \sqrt{(x+5)(x-3)} \leq \sqrt{(x-3)(4x-6)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}(\sqrt{x-5} + \sqrt{x+5}) \leq \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{4x-6}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} + \sqrt{x+5} \leq \sqrt{4x-6}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - 25} \leq 4x - 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 25} \leq x - 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 \leq x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{17}{3}$$

Kết hợp ta có  $5 \leq x \leq \frac{17}{3}$

Với  $x \leq -5$  ta được

$$\sqrt{(5-x)(3-x)} + \sqrt{(-x-5)(3-x)} \leq \sqrt{(3-x)(6-4x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-x} + \sqrt{-x-5} \leq \sqrt{6-4x}$$

$$\Leftrightarrow 5-x-x-5+2\sqrt{x^2-25} \leq 6-4x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-25} \leq 3-x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 \leq 9 - 6x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{17}{3}$$

Kết hợp ta có  $x \leq -5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = (-\infty; -5] \cup \left[5; \frac{17}{3}\right] \cup \{3\}$

**Bài 17 :** Giải bất phương trình  $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $-2 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > 2 \cdot \frac{(2x+4) - 4(2-x)}{\sqrt{9x^2+16}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > 2 \cdot \frac{(\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x})(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x})}{\sqrt{9x^2+16}} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x}) \left( 1 - \frac{2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x})}{\sqrt{9x^2+16}} \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x})(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) \left( 1 - \frac{2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x})}{\sqrt{9x^2+16}} \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow (6x-4)(\sqrt{9x^2+16} - 2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x})) > 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)(\sqrt{9x^2+16} - 2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}))(\sqrt{9x^2+16} + 2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x})) > 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)(9x^2+16 - 4(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x})^2) > 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)(9x^2+8x-32-16\sqrt{8-2x^2}) > 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)(8x-16\sqrt{8-2x^2}+x^2-4(8-2x^2)) > 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)(8(x-2\sqrt{8-2x^2})+(x-2\sqrt{8-2x^2})(x+2\sqrt{8-2x^2})) > 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2})(8+x+2\sqrt{8-2x^2}) > 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)(x-2\sqrt{8-2x^2}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} < x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

**Bài 18 :** Giải bất phương trình  $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} > \sqrt[3]{2x-1}$

**Lời giải tham khảo**

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} < \sqrt[3]{6x+1} \\ &\Leftrightarrow -2 - 3\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}(\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}) < 6x+1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}(\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}) + 2x+1 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \left[ \sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2} \right] > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} > 0 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(do biểu thức trong ngoặc luôn dương)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

**Bài 19 :** Giải bất phương trình  $(4x^2 - x - 7) \sqrt{x+2} > 10 + 4x - 8x^2$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \geq -2$

$$\begin{aligned} \text{bpt} &\Leftrightarrow (4x^2 - x - 7) \sqrt{x+2} + 2(4x^2 - x - 7) > 2[(x+2) - 4] \\ &\Leftrightarrow (4x^2 - x - 7) (\sqrt{x+2} + 2) > 2(\sqrt{x+2} - 2) (\sqrt{x+2} + 2) \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - x - 7 > 2\sqrt{x+2} - 4 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 > x + 2 + 2\sqrt{x+2} + 1 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 > (\sqrt{x+2} + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} > 2x-1 & (1) \\ \sqrt{x+2} < -2x-1 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} < 2x-1 & (3) \\ \sqrt{x+2} > -2x-1 & (4) \end{cases} \quad (II)$$

Xét (I) từ (1) và (2) suy ra  $\begin{cases} x \geq -2 \\ 2x-1 < -2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < 0$

Khi đó hệ (I)  $\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ \sqrt{x+2} < -2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1/2 \\ x+2 < (-2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; -1)$

Xét (II) từ (3) và (4)  $\begin{cases} x \geq -2 \\ -2x-1 < 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Khi đó hệ (II)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x+2} < 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ x+2 < (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5+\sqrt{41}}{8}; +\infty\right)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = [-2; -1) \cup \left(\frac{5+\sqrt{41}}{8}; +\infty\right)$

**Bài 20 :** Giải bất phương trình  $4\sqrt{x+1} + \frac{4x+4}{\sqrt{2x+3}+1} - (x+1)(x^2-2x) \leq 0$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \geq -1$

$$bpt \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 4 + \frac{4\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+3}+1} \leq (x^2-2x)\sqrt{x+1} \quad (*) \end{cases}$$

Xét (\*)

Nếu  $0 \leq x \leq 2$  suy ra VT  $> 0$  và VP  $< 0 \Rightarrow$  bất phương trình vô nghiệm

Nếu  $-1 \leq x < 0$  suy ra VT  $> 4$  và VP  $< 3 \Rightarrow$  bất phương trình vô nghiệm

Nếu  $x > 2$  ta có  $bpt \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x+1}} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+1} \leq x^2 - 2x$

$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x+1}} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+1}$  nghịch biến trên  $(2; +\infty)$

$g(x) = x^2 - 2x$  đồng biến trên  $(2; +\infty)$

Với  $x < 3$  ta có  $f(x) > f(3) = 6 = g(3) > g(x)$  bất phương trình vô nghiệm

Với  $x \geq 3$  ta có  $f(x) \leq f(3) = 6 = g(3) \leq g(x)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = [3; +\infty) \cup \{-1\}$

**Bài 21 :** Giải bất phương trình  $3\sqrt{2x-1} - 4\sqrt{x-1} \geq \sqrt[4]{\frac{2x^2-3x+1}{36}}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \geq 1$

Ta thấy  $x = 1$  là nghiệm của bất phương trình.

Xét  $x \neq 1$  chia hai vế của bất phương trình cho  $\sqrt[4]{2x^2-3x+1}$  ta được

$$3 \cdot \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x-1}} - 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x-1}} \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}} = \frac{1}{t} \quad (\text{điều kiện } t > 0)$$

Khi đó ta được bpt  $3t - \frac{4}{t} \geq \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow 3\sqrt{6}t^2 - t - 4\sqrt{6} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{-16}{6\sqrt{6}} \text{ (l)} \\ t \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ (n)} \end{cases}$

Với  $t \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$  ta có  $\sqrt[4]{\frac{2x-1}{x-1}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{-x+5}{4(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow 1 < x \leq 5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  $T = [1; 5]$

**Bài 22 :** Giải bất phương trình  $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{3} \\ x \geq 2 + \sqrt{3} \end{cases}$

Với  $x = 0$  bất phương trình luôn đúng

Với  $x > 0$  chia hai vế bất phương trình cho  $\sqrt{x}$  ta được

bpt  $\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x + \frac{1}{x}} - 4 \geq 3 \quad (1)$

Đặt  $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Rightarrow t^2 = x + \frac{1}{x} + 2$

Ta được bất phương trình  $\sqrt{t^2 - 6} \geq 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t < 0 \\ 3 - t \geq 0 \\ t^2 - 6 \geq (3 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq \frac{5}{2}$

Do đó  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \vee \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty)$

Đó chính là tập nghiệm của bất phương trình

**Bài 23 :** Giải bất phương trình  $8\sqrt{\frac{2x-3}{x+1}} + 3 \geq 6\sqrt{2x-3} + \frac{4}{\sqrt{x+1}}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \geq \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
 & 8\sqrt{\frac{2x-3}{x+1}} + 3 \geq 6\sqrt{2x-3} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} \\
 \Leftrightarrow & 8\sqrt{2x-3} + 3\sqrt{x+1} \geq 6\sqrt{(2x-3)(x+1)} + 4 \\
 \Leftrightarrow & 64(2x-3) + 9(x+1) + 48\sqrt{(2x-3)(x+1)} \geq 36(2x-3)(x+1) + \\
 & 16 + 48\sqrt{(2x-3)(x+1)} \\
 \Leftrightarrow & 72x^2 - 173x - 91 \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{7}{9} \leq x \leq \frac{13}{8}
 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left[ \frac{3}{2}; \frac{13}{8} \right]$

**Bài 24 :** Giải bất phương trình  $\frac{5}{2}\sqrt{x^3+x+2} \leq x^2+3$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \geq -1$

Nhận thấy  $x = -1$  là một nghiệm của bất phương trình

$$bpt \Leftrightarrow \frac{5}{2}\sqrt{(x+1)(x^2-x+2)} \leq (x^2-x+2) + (x+1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x^2-x+2} \geq 0 \\ b = \sqrt{x+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Có } a^2 - b^2 = x^2 - x + 2 - x - 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq b$$

Khi đó bất phương trình trở thành

$$\frac{5}{2}ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2b)(2a-b) \geq 0 \Leftrightarrow a-2b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2b$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} \geq 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2-x+2 \geq 4x+4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left( -\infty; \frac{5-\sqrt{33}}{2} \right] \cup \left[ \frac{5+\sqrt{33}}{2}; +\infty \right)$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left[ \frac{5+\sqrt{33}}{2}; +\infty \right) \cup \{-1\}$

**Bài 25 :** Giải bất phương trình  $3\sqrt{x^3-1} \leq 2x^2 + 3x + 1$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \geq 1$

Nhận thấy  $x = 1$  là một nghiệm của bất phương trình

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow \frac{2x(x^3+x)}{\sqrt{x+1}} + 2(x+2)\sqrt{x+1} > x^3+x+2x(x+2) \\ &\Leftrightarrow (x^3+x) \left( \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - 1 \right) - (x+2)\sqrt{x+1} \left( \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - 1 \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow (x^3+x - (x+2)\sqrt{x+1})(2x - \sqrt{x+1}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x - (x+2)\sqrt{x+1} > 0 \\ 2x - \sqrt{x+1} > 0 \\ x^3+x - (x+2)\sqrt{x+1} < 0 \\ 2x - \sqrt{x+1} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t$

Nên hàm  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Trường hợp 1 :  $\begin{cases} f(x) > f(\sqrt{x+1}) \\ 2x - \sqrt{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{x+1} \\ 2x > \sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2 :  $\begin{cases} f(x) < f(\sqrt{x+1}) \\ 2x - \sqrt{x+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt{x+1} \\ 2x < \sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1+\sqrt{17}}{8}$

Kết hợp ta có tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left(-1; \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

**Bài 26 :** Giải bất phương trình  $\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-6x+11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $1 \leq x \leq 3$

$$\begin{aligned} bpt &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-6x+11} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2+2} + \sqrt{3-x} \end{aligned}$$

Xét hàm số  $f(t) = \sqrt{t^2+2} + \sqrt{t}$

Ta có  $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0 \quad \forall t \in [1; 3]$

Nên  $f(t)$  đồng biến nên  $f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3-x \Leftrightarrow x > 2$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là  $T = (2; 3]$

**Bài 27 :** Giải bất phương trình  $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{\sqrt{x^4 - x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{|x|\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nếu  $x < -1$  ta có

$$bpt \Leftrightarrow \frac{(1-x)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x \in (-\infty; -1) \Rightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(1-x)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} < 0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Neu \ x \in (1; 2] \Rightarrow bpt \Leftrightarrow \frac{(1-x)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(1-x)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} \leq 0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Neu \ x \in (2; +\infty) \Rightarrow bpt \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x-2)^2 \leq x+1$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 10x^2 + 15x - 9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2 - 4x + 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là  $T = (-\infty; -1] \cup (1; 3]$

**Bài 28 :** Giải bất phương trình  $2x + \frac{6}{x} - 1 \geq \sqrt{4x^2 + 9} + \sqrt{2x - 3}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \geq \frac{3}{2}$



$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2 - x + 6}{x} &\geq \sqrt{4x^2 + 9} + \sqrt{2x - 3} \\
 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 9 - (2x - 3)}{2x} &\geq \sqrt{4x^2 + 9} + \sqrt{2x - 3} \\
 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{4x^2 + 9} + \sqrt{2x - 3})(\sqrt{4x^2 + 9} - \sqrt{2x - 3})}{2x} &\geq \sqrt{4x^2 + 9} + \sqrt{2x - 3} \\
 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4x^2 + 9} - \sqrt{2x - 3}}{2x} &\geq 1 \\
 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 9} - \sqrt{2x - 3} &\geq 2x \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{4x^2 + 9} - 2x - 1) + (-\sqrt{2x - 3} + 1) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{4x - 8}{\sqrt{4x^2 + 9} + 2x + 1} + \frac{-2x + 4}{\sqrt{2x - 3} + 1} &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow (-2x + 4) \left( \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 9} + 2x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2x - 3} + 1} \right) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow -2x + 4 &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow x &\leq 2
 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left[ \frac{3}{2}; 2 \right]$

**Bài 29 :** Giải bất phương trình  $x^3 + (3x^2 - 4x - 4)\sqrt{x + 1} \leq 0$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x \geq -1$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \text{bpt} \Rightarrow x^3 - (3x^2 - 4y^2)y \leq 0$$

Nếu  $y = 0$  thì  $x = -1$  bất phương trình luôn đúng

Nếu  $y > 0$  thì  $x > -1$  ta có bất phương trình trở thành ( chia cho  $y^3$ )

$$\text{bpt} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(\frac{x}{y} + 2\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x/y \leq 1 \\ x/y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1 : } \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = -2\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow x = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \frac{x}{y} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là  $T = \left[-1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$

**Bài 30 :** Giải bất phương trình  $2\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x + 4}} + x^2 - 4 \leq \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện :  $x > -4$

$$\begin{aligned} \text{bpt} &\Leftrightarrow 2 \left( \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x + 4}} - 1 \right) + x^2 - 3 \leq \frac{2 - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\frac{x^2 + x + 1}{x + 4} - 1}{\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x + 4}} + 1} + x^2 - 3 \leq \frac{4 - (x^2 + 1)}{(2 + \sqrt{x^2 + 1}) \sqrt{x^2 + 1}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 3)}{\sqrt{(x + 4)(x^2 + x + 1)} + x + 4} + x^2 - 3 + \frac{x^2 - 3}{(2 + \sqrt{x^2 + 1}) \sqrt{x^2 + 1}} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 3) \left[ \frac{2}{\sqrt{(x + 4)(x^2 + x + 1)} + x + 4} + 1 + \frac{1}{(2 + \sqrt{x^2 + 1}) \sqrt{x^2 + 1}} \right] \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là  $T = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

Tài liệu này dành tặng bạn Thúy Thanh. Người đã cùng tôi đi qua 4 năm đại học.  
Chúc bạn và gia đình sức khỏe và thành công