ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ VIÈTE TRONG PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hóa)

ĐỊNH LÝ VIÈTE. Cho phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ \ (a\neq 0)$, có các nghiệm là x_1, x_2, x_3 (kể cả nghiệm bội). Khi đó:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Thí dụ 1. *Cho phương trình $x^3-6mx+5-5m^2=0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.*

Lời giải. *Điều kiện cần*: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng, suy ra: $x_1+x_3=2x_2$ (1).

Theo định lý Viète thì $x_1+x_2+x_3=0$ (2).

Từ (1) và (2) được $x_2=0$. Thay $x=0$ vào phương trình: $0^3-6m.0+5-5m^2=0\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Điều kiện đủ: • Với $m=1$ phương trình là:

$$x^3-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.\ \text{(thỏa mãn).}$$

• Với $m=-1$ phương trình là:

$$x^3+6x=0\Leftrightarrow x=0\ \ \text{(không thỏa mãn).}$$

Kết luận: $m=1$.

Thí dụ 2. *Gọi $M(x_M;y_M)$ là một điểm thuộc $(C): y=x^3-3x^2+2$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm $N(x_N;y_N)$ (khác M). Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=5x_M^2+x_N^2$.*

Lời giải.

Giả sử tuyến của (C) tại M là $d: y=px+q$. Khi đó ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-3x^2-px+2-q=0\ (*).$$

Theo đề bài $(*)$ có hai nghiệm x_M, x_N trong đó nghiệm x_M là nghiệm kép (do M là tiếp điểm).

Theo định lý Viète thì

$$x_M+x_M+x_N=3\Rightarrow x_N=3-2x_M$$

dẫn đến: $P=5x_M^2+(3-2x_M)^2$

$$=9x_M^2-12x_M+9=(3x_M-2)^2+5\geq 5.$$

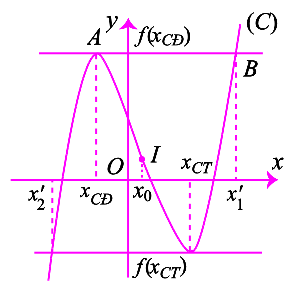
Đẳng thức xảy ra khi $x_M=\dfrac{2}{3}$. Vậy $\min P=5$.

Thí dụ 3. *Cho hàm số*

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

có các điểm cực trị là $x_1=-2$ và $x_2=3$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải. Không mất tổng quát ta chỉ cần xét với $a>0$.



Một tính chất của đồ thị hàm số bậc ba: *Điểm uốn I là trung điểm của hai điểm cực trị*, do đó:

$$x_I=\frac{x_{CĐ}+x_{CT}}{2}\Leftrightarrow -\frac{b}{3a}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi chỉ khi $f(x_{CT})<f(m)<f(x_{CĐ})$ $(*)$.

Áp dụng định lý Viète cho trường hợp nghiệm bội của phương trình $f(x)=f(-2)$ suy ra:

$$2x_{CD}+x_1'=-\frac{b}{a}\Leftrightarrow -4+x_1'=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x_1'=\frac{11}{2}.$$

Tương tự cho trường hợp nghiệm bội của phương trình $f(x)=f(3)$ suy ra:

$$2x_{CT}+x_2'=-\frac{b}{a}\Leftrightarrow 6+x_2'=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x_2'=-\frac{9}{2}.$$

Do đó:

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}<m<\frac{11}{2}\\ m\neq -2\\ m\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{9}{2};\frac{11}{2}\right)\setminus\{-2;3\}.$$

Lưu ý: *Những kết quả hay nhầm* $-2<m<3$ *hoặc là* $m\in\left(-\frac{9}{2};\frac{11}{2}\right)$.

Thí dụ 4. *Cho hàm số* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ *có đồ thị (C) đi qua các điểm* $M(1;1)$, $N(2;4)$, $P(3;9)$. *Các đường thẳng* MN, NP, PM *cắt đồ thị lần lượt tại các điểm* A, B, C *(khác* M, N, P*). Xác định các hệ số* a, b, c, d *biết tổng các hoành độ của* A, B, C *bằng 5.*

Lời giải. Dễ thấy Parabol đi qua ba điểm M, N, P có phương trình là $y=x^2$. Suy ra ba điểm M, N, P là giao của (P) và đồ thị (C).

Nên $f(x)-x^2=a(x-1)(x-2)(x-3)$

$$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+(1-6a)x^2+11ax-6a\quad (*).$$

Áp dụng định lý Viète ta được:

$$\begin{cases}x_M+x_N+x_A=-\frac{1-6a}{a}\\ x_N+x_P+x_B=-\frac{1-6a}{a}\\ x_P+x_M+x_C=-\frac{1-6a}{a}\end{cases}.$$

Suy ra: $x_A+x_B+x_C+2(x_M+x_N+x_P)=18-\frac{3}{a}$

$$\Leftrightarrow 5+2.6=18-\frac{3}{a}\Leftrightarrow a=3.$$

Vậy $f(x)=3x^3-17x^2+33x-18$.

Kết luận: $a=3$, $b=-17$, $c=33$, $d=-18$.

Thí dụ 5. *Cho hàm số* $y=x^3-3x+2\ (C)$. *Biết đường thẳng* $d: y=mx+n$ *cắt (C) tại ba điểm phân biệt* A, B, C. *Các tiếp tuyến tại ba điểm* A, B, C *của đồ thị (C) cắt đồ thị (C) lần lượt tại các điểm* A', B', C' *(tương ứng khác* A, B, C*). Chứng minh rằng ba điểm* A', B', C' *thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi tọa độ $A(a,a^3-3a+2)\in(C)$ và tiếp tuyến tại A của (C) cắt (C) tại điểm thứ hai là $A'(x';y')$. Theo định lý Viète thì

$$a+a+x'=0\Rightarrow x'=-2a\Rightarrow A'(-2a;-8a^3+6a+2).$$

Do $A\in d\Rightarrow a^3-3a+2=ma+n$, nhân hai vế với -8 và biến đổi ta được:

$$-8a^3+24a-16=-8ma-8n$$
$$\Leftrightarrow -8a^3+6a+2=(9+4m)(-2a)+18-8n$$
$$\Leftrightarrow y'=(9+4m)x'+18-8n.$$

Suy ra A' thuộc đường thẳng có phương trình $d': y=(9+4m)x+18-8n$. Làm tương tự ta cũng suy ra được B', C' thuộc $d': y=(9+4m)x+18-8n$. Do đó ba điểm A', B', C' cùng thuộc đường thẳng có phương trình $d': y=(9+4m)x+18-8n$, tức ba điểm này thẳng hàng.

Thí dụ 6. *Cho hàm số bậc ba* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *có bảng biến thiên như hình vẽ*

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	m	$\searrow$	n	$\nearrow$	$+\infty$

Với m, n *là các số nguyên thuộc khoảng* $(-10;10)$. *Có bao nhiêu cặp* $(m;n)$ *để phương trình* $f(|x+3|)=5$ *có đúng bốn nghiệm phân biệt?*

Lời giải. Đặt $t=x+3$ phương trình đã cho trở thành $f(|t|)=5$, cứ mỗi x cho duy nhất một giá trị của t và ngược lại. Nên số nghiệm của phương trình $f(|x+3|)=5$ cũng bằng số nghiệm của phương trình $f(|t|)=5$ hay cũng chính là số nghiệm của phương trình $f(|x|)=5$. Do đó yêu cầu bài toán tương đương với tìm số cặp $(m;n)$ để phương trình $f(x)=5$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt (do $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn).

Điểm uốn của đồ thị là trung điểm của hai điểm cực trị và có hoành độ $x_U=-\frac{b}{3a}$. Suy ra

$$-\frac{b}{3a}=\frac{2+4}{2}=3\Rightarrow-\frac{b}{a}=9.$$

Xét $f(x)=n\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d-n=0$. Từ bảng biến thiên đã cho ta nhận thấy phương trình này có nghiệm đơn x_1 và nghiệm kép $x_2=x_3=4$.

Theo định lý Viète thì: $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$

$\Leftrightarrow x_1+4+4=9\Leftrightarrow x_1=1$. Vậy $f(x)=n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=1\end{array}\right.$.

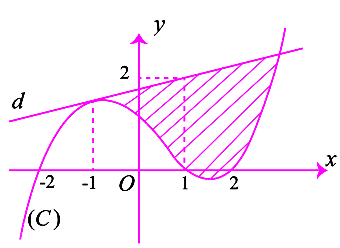
Lại do hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ nên suy ra $f(0)<f(1)=n$. Từ đó dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ dẫn đến: Phương trình $f(x)=5$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt ứng với hai trường hợp sau:

TH1: $m=5>n\Rightarrow n\in\{-9;-8;....;4\}$ có 14 cặp.

TH2: $n=5<m\Rightarrow m\in\{6;7;8;9\}$ có 4 cặp.

Kết luận: Có 18 cặp.

Thí dụ 7. *Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng $d:y=mx+n$ là tiếp tuyến của (C) tại $x_0=-1$. Tính diện tích phần gạch chéo trong hình vẽ*



Lời giải. Đồ thị (C) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ là $-2, 1, 2$. Theo định lý Viète suy ra:

$$-\frac{b}{a}=(-2)+1+2=1.$$

Xét phương trình tương giao của đồ thị (C) và đường tiếp tuyến d:

$$ax^3+bx^2+cx+d=mx+n$$
$$\Leftrightarrow ax^3+bx^2+(c-m)x+d-n=0\ \ (*).$$

Phương trình (*) có nghiệm kép $x=-1$ và một nghiệm đơn $x=\alpha$. Áp dụng định lý Viète cho phương trình này ta được:

$$2.(-1)+\alpha=-\frac{b}{a}=1\Rightarrow\alpha=3.$$

Xét biểu thức $g(x)=(mx+n)-(ax^3+bx^2+cx+d)$.

Do $g(x)$ là đa thức bậc ba và có nghiệm kép $x_1=x_2=-1$, $x_3=3$ nên suy ra:

$$g(x)=-a(x+1)^2(x-3).$$

Mặt khác $g(1)=2-0=2$, từ đó tìm được $a=\frac{1}{4}$.

Suy ra diện tích phần gạch chéo:

$$S=\int_{-1}^{3}g(x)dx=\int_{-1}^{3}\frac{(x+1)^2(x-3)}{-4}dx=\frac{16}{3}.$$

Thí dụ 8. *Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C) và M là một điểm bất kỳ thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại một điểm thứ hai N. Tiếp tuyến của (C) tại N lại cắt (C) tại điểm thứ hai P. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng MN và (C), đường thẳng NP và (C). Chứng minh rằng $S_2=16S_1$.*

Lời giải. Không giảm tổng quát ta chỉ cần xét $f(x)=ax^3+bx$. Gọi hoành độ các điểm M, N, P lần lượt là x_1, x_2, x_3. Giả sử MN có phương trình $y=mx+n$. Khi đó phương trình $f(x)=mx+n$ có nghiệm x_1 (nghiệm kép) và x_2.

Theo định lý Viète: $2x_1+x_2=0\Leftrightarrow x_2=-2x_1$.

Mặt khác: $f(x)-mx-n=a(x-x_1)^2(x+2x_1)$
$$=a(x-x_1)^3+3ax_1(x-x_1)^2.$$

Dẫn đến tính được: $S_1=\left|\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-mx-n]dx\right|$

$$=\left|\frac{a(x_2-x_1)^4}{4}+ax_1(x_2-x_1)^3\right|=\left|\frac{a(3x_1)^4}{4}-ax_1(3x_1)^3\right|.$$

Lập luận hoàn toàn tương tự ta cũng thu được $x_3=-2x_2$ và $S_2=\left|\int_{x_2}^{x_3}\left[a(x-x_2)^3+3ax_2(x-x_2)^2\right]dx\right|$

$$=\left|\frac{a(x_3-x_2)^4}{4}+ax_2(x_3-x_2)^3\right|=\left|\frac{a(3x_2)^4}{4}-ax_2(3x_2)^3\right|.$$

Do $x_2=-2x_1$ nên suy ra $S_2=16S_1$ (đpcm).

Thí dụ 9. *Tìm tham số m để phương trình $\left|x^3-3x\right|=m$ có ba nghiệm dương phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=2+\sqrt{3}$.*

Lời giải. Lập bảng biến thiên của hàm số $y=\left|x^3-3x\right|$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy phương trình $\left|x^3-3x\right|=m$ có ba nghiệm dương phân biệt khi $m\in(0;2)$ (*). Với $m\in(0;2)$ thì ba nghiệm $0<x_1<x_2<\sqrt{3}<x_3$. Suy ra: x_3 là nghiệm của phương trình $x^3-3x=m$, còn x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $x^3-3x=-m$, hay $-x_2,-x_1,x_3$ là ba nghiệm của phương trình $x^3-3x-m=0$. Theo định lý Viète và giả thiết có hệ:

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=2+\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow x_3=1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Từ đó tìm được $m=(x_3)^3-3x_3=\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (thỏa mãn (*)).

Kết luận: $m=\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Thí dụ 10. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\begin{cases}a<1\\ abc=1000\\ bc(1-a)+a(b+c)=110\end{cases}$.*

Chứng minh rằng $c\in(10;100)$.

Lời giải. Từ $\begin{cases}abc=1000\\ bc(1-a)+a(b+c)=110\end{cases}$, suy ra $\begin{cases}ab+bc+ca=1110\\ abc=1000\end{cases}$. Do đó a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3-mx^2+1110x-1000=0$ với $m=a+b+c>0$. Phương trình được viết lại:

$$(x-1)(x-10)(x-100)=(m-111)x^2 \quad (*).$$

Do $x=a$ là nghiệm của $(*)$ và $0<a<1$ nên $(m-111)a^2=(a-1)(a-10)(a-100)<0\Rightarrow m-111<0.$

Dẫn đến: $\begin{cases}(c-1)(c-10)(c-100)=(m-111)c^2<0\\ (b-1)(b-10)(b-100)=(m-111)b^2<0\end{cases}$

$\Rightarrow b,c\in(0;1)\cup(10;100)$.

Nếu $c\in(0;1)\Rightarrow b=\frac{1000}{ac}>\frac{1000}{1}>100$ (vô lý).

Vậy $c\in(10;100)$ (đpcm).

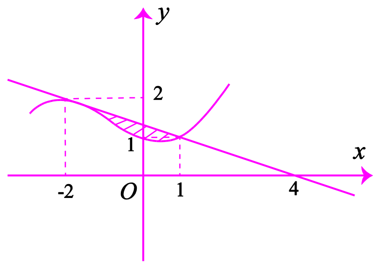
BÀI TẬP CỦNG CỐ

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-mx+2m$ cắt đường thẳng $y=-x+1$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-7x^2+(m+6)x-m=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân:

Câu 3. Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ bằng -2 cắt đồ thị tại điểm thứ hai $N(1;1)$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 4. Biết diện tích phần gạch chéo là $\frac{9}{16}$.

Tính tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.



Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

Câu 5. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị đi qua các điểm $M(-1;2)$, $N(1;-2)$, $P(0;-1)$. Các đường thẳng MN, NP, PM lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$ (khác M, N, P). Biết $x_A+2x_B+x_C=-5$. Tính giá trị của biểu thức $T=2a+b+c+d$.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-2020x\ (C)$, xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=1$ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai là A_2 khác A_1 có tọa độ $(x_2;y_2)$. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai là A_3 khác A_2 có tọa độ $(x_3;y_3)$. Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai là A_n khác A_{n-1} có tọa độ $(x_n;y_n)$. Tìm n biết $2020x_n+y_n+2^{2025}=0$.

Câu 7. Cho hai số thực dương a, b và phương trình $x^3-x^2+ax-b=0$ có ba nghiệm. Chứng minh rằng:

a) $a+b\leq\frac{10}{27}$. b) $a-2b\leq\frac{7}{27}$.